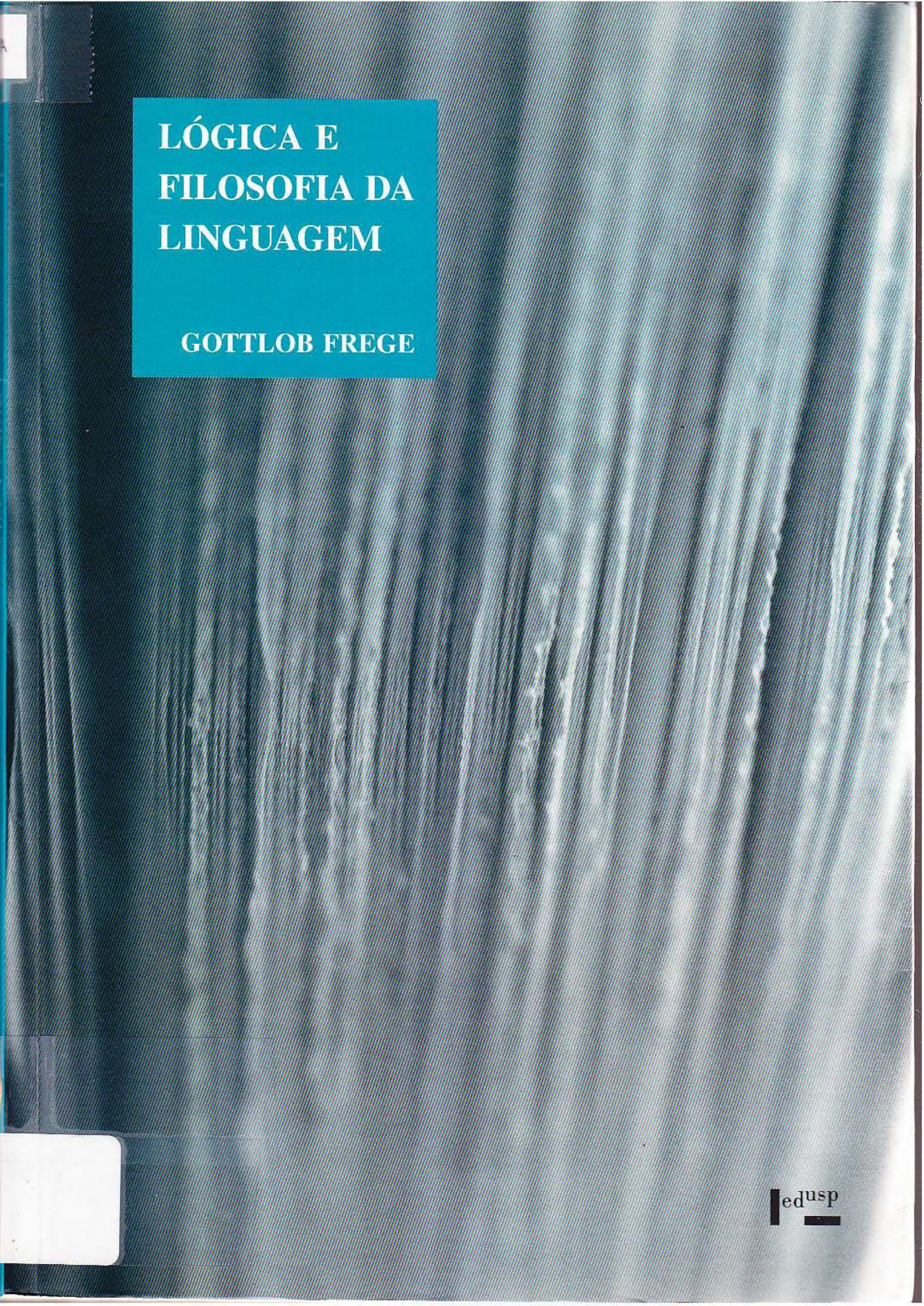
LÓGICA E FILOSOFIA DA LINGUAGEM

GOTTLOB FREGE



edusp

Ao longo de uma retraída vida de professor, Gottlob Frege (1848-1925) veio a realizar uma obra que cada vez mais atrai a atenção de filósofos, linguistas e lógicos. O presente livro encerra o que de mais importante Frege escreveu acerca de filosofia da linguagem, filosofia da lógica e questões fundacionais de matemática. Em seus textos são desenvolvidos instigantes tópicos relativos ao conhecimento, verdade, existência, significado e linguagem. Suas reflexões sobre a natureza da linguagem influenciou o pensamento recente, notadamente de Russell, Carnap e Wittgenstein; sua crítica ao psicologismo marcou profundamente a fase inicial de Husserl; e suas investigações semânticas orientaram de forma decisiva a construção de uma teoria compreensiva do significado. Pode-se dizer que Frege deu início à filosofia analítica, foi o criador da lógica matemática e o primeiro a apresentar uma teoria operatória a respeito da fundamentação lógica da aritmética. Donde, a importância excepcional de seu pensamento.

O presente livro contém uma longa introdução geral ao pensamento de Frege; compreende seus mais importantes textos, todos profusamente anotados; encerra também uma bibliografia, um índice remissivo e o *corpus fregeanum*. Cremos assim que esta segunda edição ampliada e totalmente revista, seja em tudo superior à primeira de 1978.

LÓGICA E FILOSOFIA DA LINGUAGEM

Clássicos 31

LÓGICA E FILOSOFIA DA LINGUAGEM

GOTTLOB FREGE

Seleção, introdução, tradução e notas de

Paulo Alcoforado

edusp

Título do original em alemão:
Schriften zur Logik und Sprachphilosophie

1ª edição 1978 (Edusp/Cultrix)
2ª edição ampliada e revista 2009 (Edusp)

Ficha catalográfica elaborada pelo Departamento Técnico
do Sistema Integrado de Bibliotecas da USP

Frege, Gottlob, 1848-1925.
Lógica e Filosofia da Linguagem / Gottlob Frege; seleção, introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado. – 2. ed. amp. e rev. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.
248 p.; 23 cm. – (Clássicos; 31)

Inclui bibliografia.
Inclui apêndice: Corpus Fregeanum.
ISBN 978-85-314-1180-9

1. Filosofia da linguagem. 2. Ensaios de filosofia. I. Alcoforado, Paulo. II. Título. III. Série.

CDD 401

Edusp – Editora da Universidade de São Paulo
Av. Prof. Luciano Gualberto, Travessa J, 374
6º andar – Ed. da Antiga Reitoria – Cidade Universitária
05508-010 – São Paulo – SP – Brasil
Divisão Comercial: Tel. (11) 3091-4008 / 3091-4150
SAC (11) 3091-2911 – Fax (11) 3091-4151
www.edusp.com.br – e-mail: edusp@usp.br

Printed in Brazil 2009

Foi feito o depósito legal

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Embora seja um pensador quase que contemporâneo, da vida e da personalidade de Frege pouco se sabe[1].

Friedrich Ludwig Gottlob Frege nasceu em Wismar, Alemanha, em 8 de novembro de 1848. Seu pai, Karl Alexander, foi o fundador e diretor de uma escola para meninas. Sua mãe, Auguste Bialloblotzky, foi professora e, mais tarde, diretora da escola que seu marido fundara. Pouco se sabe de sua infância e juventude. Aparentemente, teria passado todos esses anos em Wismar e cursado parte do curso colegial sob a orientação dos professores Krain (pai e filho). Por fim, na primavera de 1869, tendo passado no exame de graduação (*Abitur*), ingressou imediatamente na Universidade de Jena.

De sua vida universitária tampouco se sabe muito mais, salvo os cursos que fez e os professores que teve. Passou quatro semestres em Jena, da primavera de 1869 ao inverno de 1871. Durante esse período, teve como professores Geuther

1. Os dados biográficos desta apresentação devo-os, em sua maior parte, a T. W. Bynum. Ao que me consta, a ele cabe a autoria da biografia mais detalhada de que dispomos de Frege. Cf. G. Frege, *Conceptual Notation and Related Articles*, Oxford, Clarendon, 1972, T. W. Bynum (ed.). Por fim, cumpre dizer que aqui nos é imposto, nas notas e na tradução, utilizar as palavras seja sem aspas (quando usadas – ex. a lógica é a ciência do raciocínio), seja com aspas simples (quando mencionadas – ex. 'lógica' é trissilábica) e seja ainda com aspas duplas (quando se quer expressar seu sentido intensional – ex. 'logica' tem como significado "ciência do raciocínio"). No que diz respeito aos textos da frase, porém, como não poderia deixar de ser, nos restringimos a estrita observância de suas práticas – nem sempre coerentes – quanto ao emprego das aspas.

em química, Fischer em filosofia, e Abbe, Schaeffer e Snell em matemática. A seguir, dirigiu-se para Göttingen, onde permaneceu por cinco semestres – da Páscoa de 1871 a dezembro de 1873 –, estudando filosofia da religião com Lotze, física com Weber e Riecke, e matemática com Clebsch, Schering e Voss.

Um de seus maiores interesses quando estudante foi a teoria das funções de variáveis complexas, que estudou com Abbe e Schering. Em 1873, Frege apresenta sua dissertação doutoral, de acentuada inspiração gaussiana, *Sobre uma Representação Geométrica de Figuras Imaginárias no Plano*[2], com a qual obteve o grau de doutor em filosofia pela Universidade de Göttingen, em 12 de dezembro daquele ano. Assim que recebeu esse título, foi indicado, provavelmente pelo professor Abbe, para um posto na Universidade de Jena. Entre as exigências que teve que cumprir, destaca-se sua tese de docência (*Habilitationsschrift*), escrita provavelmente em Göttingen, intitulada *Métodos de Cálculo Baseados sobre uma Extensão do Conceito de Grandeza*[3], na qual desenvolve um cálculo funcional que contém os germes de suas futuras contribuições à lógica. Tal trabalho impressionou sensivelmente os professores da Faculdade de Matemática de Jena, merecendo grandes elogios especialmente do professor Abbe. Este achou-a clara, erudita e madura, indicando grande poder criador, e dotada de verdadeira originalidade. Ele chegou mesmo a manifestar que nela se encontram os germes de novos conceitos que levariam, se devidamente trabalhados e desenvolvidos, a importantes conquistas no domínio da análise matemática. Assim, no semestre do verão de 1874, Frege inicia sua atividade docente e, durante seus quarenta e quatro anos vividos em Jena, desenvolve uma intensa atividade de ensino e pesquisa. Nunca porém chegou a ser professor titular pleno, e ao comemorar sessenta anos, em 1908, foi-lhe negada a condecoração rotineiramente concedida a todos os professores que atingem essa idade, sob a alegação de que 'sua atividade carecia de importância acadêmica para a Universidade'[4].

É freqüente afirmar-se que a obra de Frege permaneceu praticamente desconhecida durante toda ou quase toda sua vida. Tal é o que B. Russell afirma em mais de uma obra[5], dizendo-se seu primeiro leitor. Na verdade, porém, não foi bem assim. Muito antes de 1901 – ano em que Russell travou o primeiro

2. G. Frege, *Über eine geometrische Darstellug der imaginären Gebilde in der Ebene*, Jena, Neuenhann, 1873. Este trabalho foi republicado em G. Frege, *Kleine Schriften*, 1967, pp. 1-49.
3. G. Frege, *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*, Jena, F. Frommann, 1874. Republicado em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 50-84.
4. G. Patzig, *Sprache und Logik*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1970, p. 77. Veja-se, por outro lado, as considerações de T. W. Bynum, *op. cit.*, pp. 42-43.
5. Cf. por exemplo B. Russell, *Introdução à Filosofia Matemática*, Rio de Janeiro, Zahar, 1974, p. 31, nota.

contato com o pensamento de Frege – inúmeras outras pessoas, como veremos no que se segue, já tinham lido, comentado e criticado mais de uma de suas obras. O pensamento de Frege foi reconhecido e elogiado por homens da envergadura de E. Husserl, L. Wittgenstein e G. Peano. O que Russell na verdade realizou não foi propriamente "descobrir" a obra de Frege, mas perceber toda a sua importância e as implicações de muitos de seus princípios. É um fato, contudo, que o grande público filosófico o desconhecia por completo. O que é, em certo sentido, verdadeiro ainda hoje, sobretudo entre nós. Na verdade, Frege é um matemático que se deteve no estudo de duas áreas bem definidas da filosofia: epistemologia das ciências formais e filosofia da linguagem. Nunca foi portanto objetivo seu empreender uma investigação de larga escala sobre a estrutura geral e última da realidade em sua totalidade.

Para Frege, mesmo nesta fase inicial de sua vida acadêmica, já se vai delineando como algo de fundamental que os tópicos básicos da matemática – conceitos e pressupostos iniciais – sejam totalmente explicitados e esclarecidos. Isto, aliás, virá a ser um dos objetivos subjacentes de suas obras, e uma das motivações básicas de suas críticas e análises. Assim, o desejo de clarificar as noções fundamentais da matemática e de tornar exata a concatenação dessas noções – como evidencia a resenha de um insignificante manual de aritmética[6] publicada ainda em 1874 – talvez tenham sido os fatores que desencadearam e motivaram a maioria de seus trabalhos, a saber, a procura de uma fundamentação para a aritmética. 'Após algumas explicações parcialmente infelizes das operações de cálculo e de seus símbolos, são apresentadas algumas proposições no segundo e terceiro capítulos sob o título de "os teoremas fundamentais e as fórmulas de transformações mais essenciais". Estas proposições, que formam realmente o fundamento de toda a aritmética, são reunidas sem provas [...] A generalização dos conceitos, tão importante em aritmética, [...] deixa muito a desejar [...] O resultado de todas essas deficiências é que ao estudante só resta memorizar as leis da aritmética e ficar satisfeito com palavras que ele não entende'[7].

Desse modo, com apenas 26 anos, Frege já se encontrava penetrado pela atitude que caracterizará toda sua atividade intelectual: a busca dos elementos últimos e dos modos pelos quais estes se interrelacionam no processo de

6. H. Seeger, *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeited,* Schwerin i. M., A. Hildebrand, 1874. A resenha de Frege foi republicada em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 85-86.

7. Resenha de Frege a H. Seeger, *Die Elemente der Arithmetik,* em G. Frege, *Kleine Schriften*, p. 85. Aqui, segui proximamente a tradução de T. W. Bynum (ed.), *op. cit.*, p. 9.

reconstrução da aritmética[8]. Essa orientação primordial explicaria seu desinteresse pela pesquisa em matemática enquanto tal, e mesmo, arriscaria dizer, seu interesse pela lógica apenas enquanto esta é um instrumento indispensável para seus propósitos de fundamentar a aritmética. Com isso, em absoluto, quer-se dizer que suas investigações sejam de pequena monta ou irrelevantes. Pelo contrário: o que queremos dizer é que, ao que tudo indica, sua imensa contribuição à lógica tem sua motivação no fato de ele a entender como o ponto de partida inelutável para a reconstrução da aritmética. Ela, segundo essa perspectiva, se afigura indispensável para a concretização de sua atitude inicial, que é a de clarificar ou elucidar as noções básicas da aritmética, seja eliminando toda ambigüidade, seja explicitando todos os pressupostos – definições, axiomas e regras inferenciais – que possam existir em seu contexto. Isto, mais tarde, ensejará a implementação de seu programa logicista.

É importante notar que Frege, em sua *Conceitografia, uma Linguagem Formular*[9] *do Pensamento Puro Modelada*[10] *sobre a da Aritmética*[11], publicada cinco anos depois, procurará proceder exatamente segundo essa atitude. Para a implementação de tal programa, cumpre descartar como imprestáveis seja a linguagem corrente, seja a lógica tradicional aristotélica, seja ainda a lógica algébrica de Boole (ou Schröder). Seu ponto de partida consiste em construir um sistema formal cujas noções básicas sejam fixadas com exatidão e clareza, e a seguir sejam estabelecidos os enunciados primitivos e regras de inferências que tornam possível desenvolver sem qualquer lacuna uma demonstração nesse sistema[12]. Ele foi assim levado a desenvolver, pela primeira vez, um

8. Não raramente, Frege emprega a palavra 'aritmética' de maneira vaga e imprecisa. Por vezes, ela é usada em sentido estrito, usual e elementar, envolvendo apenas as operações sobre os inteiros. Passagens há, porém, em que esta palavra assume um significado mais amplo, que abrange, além da aritmética em sentido estrito e elementar, operações sobre os racionais, irracionais e complexos. E, finalmente, em certos textos, sob este nome se encontram em questão inclusive os cálculos diferencial e integral. Portanto, o termo 'aritmética' é tomado freqüentemente por Frege em sentido mais amplo que o usual, vale dizer, envolvendo não só grandezas discretas como também o contínuo e os complexos e, por vezes, até certos tópicos de análise.
9. Cumpre não confundir *Formalsprache* com *Formelsprache*. A primeira palavra cabe ser traduzida por 'linguagem formal', enquanto que a segunda pode ser traduzida tanto por 'linguagem por fórmulas' como por 'linguagem formular'. Aqui, por razões de brevidade, preferimos a segunda.
10. O verbo *nachbilden* significa "copiar", "reproduzir", e assim, no título da presente obra, *nachgebildete*, "modelada sobre", é uma tradução bem razoável (N. do T.).
11. G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, L. Nebert, 1879. Republicada em G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, 1964.
12. Por tal razão, Frege é tido como o inventor daquilo que mais tarde foi chamado de 'sistema formal'. Contudo, ele nunca mostrou um interesse particular por investigações metamatemáticas (consistência, completude, independência etc.) a respeito do sistema que desenvolvera. Pelo contrário, ele só mostrou interesse por sua utilização.

sistema formal a partir do qual é possível entender com exatidão não só o que vem a ser uma prova como também obter provas pela exclusiva utilização de regras formais aplicadas aos axiomas[13]. Na *Conceitografia* – que em grandes linhas pode ser considerada como um tratado de lógica matemática –, Frege apresenta o seu sistema notacional, que discrepa das soluções contemporâneas por utilizar o aspecto bidimensional da página impressa mediante o uso de barras horizontais e verticais[14]. Ele parte não da noção de conceito, mas da noção de juízo, distinguindo juízo (*Urteil*) de conteúdo asserível (*beurteilbar Inhalt*), isto é, 'uma mera combinação de representações'. A seguir, ele estabelece quatro noções primitivas – a negação, a implicação, a quantificação universal e a igualdade – e nove axiomas, e enuncia as regras primitivas de inferência. Com isso, ele estabelece as bases do que hoje denominamos de cálculo proposicional e cálculo de predicados. Por assim fazer, chega a soluções da mais alta originalidade e importância, como rejeitar a análise do juízo em sujeito e predicado[15] em favor das noções de função e argumento[16], a associação do quantificador à variável para expressar a generalidade[17], a noção de seqüência por meios estritamente lógicos, a noção de propriedade hereditária em uma seqüência[18], sua célebre definição de ancestral de uma relação, obtendo ainda como teorema

13. É verdade, contudo, que o sistema formal exposto na *Conceitografia* apresenta deficiências que serão em grande parte sanadas com o advento das *Leis Fundamentais da Aritmética* (1893).
14. A respeito de sua notação, ver o que ele próprio diz ao responder aos ataques de Schröder. Cf. mais adiante 'Sobre a Finalidade da Conceitografia'.
15. Frege rejeita a análise tradicional do juízo (ou sentença) em sujeito e predicado (*Begriff.*, § 3). Em carta, datada de agosto de 1882, ao que parece a Anton Marty, diz que 'a relação que se dá entre sujeito e predicado não é um terceiro termo (*ein Drittes*) acrescentado a esses dois, mas pertence ao conteúdo do predicado, pela qual este se torna insaturado'. G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, p. 164.
16. Eis dois exemplos significativos de como Frege procede a formalização dos juízos da lógica tradicional em termos de função e argumento. O juízo singular 'Pedro é mortal' é reescrito da seguinte forma: 'A função *ξ é mortal* é aplicada ao argumento *Pedro*'. O juízo categórico universal 'Todo homem é mortal' é reescrito: 'A função de nível superior *todo* é aplicada à função *se ξ é homem, então ξ é mortal*' (*Begriffsschrift*, § 12). E assim, todos os juízos da lógica tradicional podem ser notados em termos conceitográficos, embora essa formalização discrepe quanto à questão do importe existencial da interpretação tradicional.
17. A mais importante contribuição lógica de Frege é a quantificação, vale dizer, a descoberta de que as variáveis têm um escopo ou que a generalidade expressa pela variável pode ser delimitada a uma parte da sentença (*Begriffsschrift*, § 11; *Grundgesetze*, I, § 8). E, em decorrência disso, ter criado, no plano notacional, as convenções que permitem expressar ou delimitar esse escopo. A originalidade de sua contribuição não reside, portanto, numa vaga afirmação de que as variáveis podem ser usadas para indicar generalidade. Pelo contrário, Frege entende que a mera presença da variável é suficiente para expressar a universalidade do conteúdo.
18. Cumpre não esquecer que a noção de propriedade hereditária não é estabelecida *simpliciter*. Sempre existe a referência a uma seqüência em relação a qual uma dada propriedade mostrou-se aplicável tanto ao domínio da seqüência, como ao conjunto imagem da seqüência. É bom lembrar também que

a indução matemática que era em seu tempo tida como um princípio básico e fundamental da matemática. Nessa obra se encontram de maneira explícita ou latente inúmeros dos mais importantes conceitos que se devem a Frege. Deste modo, ele pôde desenvolver axiomaticamente um cálculo proposicional e uma teoria da quantificação envolvendo um cálculo dos predicados de primeira e de segunda ordens e um esboço de uma teoria ingênua dos conjuntos. Com os instrumentos por ele introduzidos, a lógica pôde, pela primeira vez, manipular inferências que envolvem a igualdade e a quantificação múltipla. Seu advento marca a criação da lógica formal contemporânea, e em importância só é comparável aos *Primeiros Analíticos* de Aristóteles, livro com que se inaugura a história da lógica formal. Este fato não entra em choque com a afirmação, mais de uma vez repetida, de que o feito de Frege foi logicizar a matemática e não matematizar a lógica – que o distingue em certo sentido de seu tempo. Mas para chegar a essa logicização impunha-se, antes de mais nada, elaborar os devidos instrumentos formais.

O termo *Begriffsschrift*[19], 'conceitografia', será usado por Frege em três acepções distintas: i) referindo-se ao livro por ele publicado em 1879; ii) referindo-se à sua lógica formal ou à sua linguagem simbólica, que foi, de sua parte, objeto de duas reconstruções: uma em 1879 e outra em 1893; e iii) referindo-se a um sistema simbólico, artificial, elementar, não determinado e dotado (pelo menos potencialmente) de uma estrutura e de uma descrição rigorosa – é nesta última acepção que este termo se aplica à lógica algébrica de Boole-Schröder. Com os anos, Frege parece arrependido de haver empregado esta palavra para rotular seu sistema formal. 'Não parto de conceitos para com eles construir pensamentos ou proposições; pelo contrário, obtenho os componentes de um pensamento pela decomposição (*Zerfällung*) do pensamento. Sob este aspecto, minha conceitografia difere das criações similares de Leibniz e seus sucessores – em que pese seu nome, o qual eu talvez não tenha escolhido muito adequadamente'[20].

por seqüência Frege entende algo como aplicação funcional ou relação, sendo um conceito introduzido sem uma explícita definição, o que não ocorre com as noções de hereditariedade, ancestralidade, procedimento unívoco etc. (*Begriffsschrift*, § 10).

19. Este termo, como se sabe, já fora usado anteriormente pelo célebre historiador da filosofia F. A. Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie*, Berlin, Vermischte Abhandlungen,1867, vol. III, p. 4. A palavra *Begriffsschrift* é constituída pela junção de *Begriff*, que significa "conceito", com *Schrift*, que quer dizer "grafia", "escrita" e, no contexto da lógica e da matemática, "notação". Portanto, segundo sua composição, *Begriffsschrift* significa notação ou grafia conceitual. Por tal razão, esse termo foi aqui traduzido por 'conceitografia'.

20. Fragmento de 26 de julho de 1919, cf. J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, Harvard, 1967, p.I, nota b. Cf. ainda G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, p. 273. Por fim, destaco a seguinte passa-

À época, Frege concebia a conceitografia que desenvolvera não como *a* lógica (ou *uma* lógica), mas como uma linguagem necessária para veicular os conceitos e enunciados da aritmética[21]. Em seu entender, ela objetivaria substituir a linguagem ordinária face à imperfeição e à insuficiência desta para usos científicos. De fato, a linguagem corrente é com freqüência obscura, ambígua e irregular. E, na maior parte das vezes, mostra-se inapta para expressar relações lógicas de certa complexidade. Por suas limitações intrínsecas, os traços lógicos fundamentais do conteúdo das proposições nunca são por ela explicitados. Por seu intermédio, tampouco é possível visualizar de modo manifesto e exaustivo todos os componentes que devem estar presentes numa prova. Por outro lado, a conceitografia se mostra apta não só para expressar todos os aspectos lógicos relevantes do conteúdo das proposições, como também para indicar de que conjunto de axiomas as provas são derivadas. Ela tem, portanto, uma característica de *órganon* ou *adminiculum*, vale dizer, é concebida de forma eminentemente instrumental – 'fio de Ariadne', *Hilfsmittel*, *brauchbares Werkzeug*. Com ela, tem-se um meio seguro de se veicular conceitos e de se expressar certos resultados cientificamente relevantes.

Embora Frege compartilhe da concepção de Leibniz segundo a qual a conceitografia deve ser encarada como um meio e um instrumento, opõe-se no entanto a ele na medida em que concebe esse instrumento como tendo um domínio restrito e bem delimitado de atuação. Com efeito, sabemos que Leibniz entende que a linguagem corrente não espelha adequadamente a disposição dos fatos do mundo. Daí sua motivação de construir uma linguagem ideal apta para representar de modo satisfatório todas as relações entre as

gem: 'De fato, esta é uma das diferenças mais marcantes entre meu modo de entender e o de Boole e, posso ainda acrescentar, o aristotélico, isto é, o fato de meu ponto de partida não serem os conceitos, mas os juízos' ('Sobre a Finalidade da Conceitografia', p. 72, *infra*).

21. Cf. Frege, 'Aplicações da Conceitografia', em que ele nos diz, logo de início, de forma descritiva que 'mediante sua conceitografia, relações aritméticas e geométricas podem ser expressas'. A conceitografia seria, assim, um sistema ou linguagem que se utilizaria de sinais inespecíficos para expressar relações as mais gerais. E a utilização do termo 'conceitografia' indicaria que ele está consciente de que fizera algum progresso no âmbito dos estudos fundacionais, mas não necessariamente que criara a lógica moderna. Mas o fato de Frege estar consciente de que estabelecera um sistema formal anterior, mais primitivo e elementar que a aritmética, não significa *ipso facto* que ele tenha identificado tal sistema com a lógica. Mais tarde, ele chegou a essa identificação e passou a utilizar a palavra 'lógica' em lugar de 'conceitografia'. Com efeito, em sua Introdução às *Leis Fundamentais da Aritmética* (1893) ele mostra estar plenamente consciente de ter realizado algo de importante, pois chega a almejar que o livro possa contribuir de algum modo à renovação da lógica *(möge denn dies Buch, wenn auch spät, zu einer Erneuerung der Logik beitragen*, p. xxvi).

coisas. Tal linguagem recebeu os nomes de *lingua universalis* (*philosophica, generalis* ou *rationalis*) e *characteristica universalis*. A se ater ao que dissemos, as pretensões de Frege são menos ambiciosas do que as de Leibniz. Ele pretendia produzir não um *calculus ratiocinator*, mas uma *lingua characteristica*[22], embora entenda que a conceitografia tem seu domínio de atuação circunscrito à lógica e à matemática, enquanto que a *lingua characteristica* leibniziana não deveria ter, em princípio, limitações[23]. A conceitografia fregeana pretende substituir a linguagem corrente em determinadas atividades científicas. Desse modo, sua elaboração tem como finalidade precípua aperfeiçoar certos métodos científicos a fim de tornar possível o desenvolvimento de determinadas ciências. A conceitografia foi por Frege concebida segundo dois pré-requisitos: ser instrumental por natureza e limitada em seu domínio de aplicação. 'Assim, minha conceitografia foi concebida como um instrumento para servir a determinados fins científicos e não deve ser descartada pelo fato de não servir para outras finalidades'[24].

Ao abordar a conceitografia nos deparamos com questões relativas a sua origem e também quanto a sua finalidade. De fato, a conceitografia se depara em sua origem com a questão de sua razão de ser ou justificação. E, no entender de Frege, essa consistiria en contornar toda a gama de limitações presentes na aritmética corrente. Impunha-se desse modo repensar e refazer a aritmética: i) eliminando as intuições, ii) preenchendo as lacunas, iii) esclarecendo os tópicos obscuros, iv) explicitando os pressupostos, e v) suprimindo o excesso da concisão. Por outro lado, a questão de sua finalidade leva Frege a travar mais de um debate com a lógica algébrica booleana. Com efeito, tal lógica é, em seu modo de ver, um sistema formal, incapaz de representar a aritmética em toda a sua extensão e, por tal razão, cabe ser descrita como um mero *cal-*

22. Frege emprega aqui, como em outros lugares, a forma *characterica* (*scil., lingua*) quando sabidamente Leibniz usa *characteristica* (*scil., lingua*). Ao que parece, Frege a teria tomado de A. Trendelenburg (*Hist. Beitr. zur Phil.*, III, p. 6ss), ou quiçá das edições de R. E. Raspe e J. E. Erdmann das obras de Leibniz. Cf. G. Frege, *Nachgelassene*, p. 9, n. 2.
23. O projeto de Leibniz para a construção de uma *characteristica universalis* se desdobra, por assim dizer, em dois segmentos. De início, procede-se a um levantamento de todas as idéias simples, elementares ou indecomponíveis que se encontram na base de todo conhecimento humano e a cada uma dessas idéias aplica-se um símbolo igualmente elementar. Forma-se assim o que veio a ser denominado 'silabário da razão' ou 'alfabeto do pensamento'. Chegado a esse patamar, atingimos o segundo e último segmento do projeto de Leibniz. Pela combinação adequada dos símbolos elementares passamos a obter idéias complexas originando assim essa língua ideal tão almejada. Leibniz veio mais tarde a projetar um *calculus ratiocinator* que, à semelhança de uma álgebra, funcionasse como um sistema formal de extensão de uma lógica.
24. G. Frege, *Conceitografia*, "Prefácio", *infra* p. 46.

culus ratiocinator cujo objetivo se esgota no desenvolvimento de suas potencialidades formais internas. O cálculo que Frege tinha em mente criar, diz ele em várias de suas obras, não era algo desta natureza. Pelo contrário, era seu objetivo elaborar um sistema formal que por sua potência expressiva fosse capaz de representar a aritmética e dela eliminar toda lacuna, ambiguidade e pressupostos tácitos. Tal sistema formal, em virtude de suas propriedades estruturais e força representativa, vai muito além de um *calculus ratiocinator* e cumpre ser qualificado, para nos manter no universo leibniziano, de uma *lingua characteristica*, ou falando fregeanamente, uma conceitografia.

Nesta fase inicial, por suas concepções filosóficas e semânticas ainda não estarem suficientemente desenvolvidas, ele estabelece certas identificações que serão, posteriormente, distinguidas. Assim, *Gedanke*, 'pensamento', *rein Denken*, 'pensamento puro', e *Begriff*, 'conceito', ainda não têm, nesse momento, o sentido técnico que assumirão mais tarde. Ainda nesse período, Frege associa o termo *Inhalt*, 'conteúdo', à totalidade da noção expressa pelo sinal e *Bedeutung*, 'significado', à contrapartida significativa dos sinais.

A *Conceitografia* teve, na verdade, uma recepção muito fria, e pode-se mesmo dizer que passou despercebida. Os comentários e resenhas a que deu origem – essencialmente de Lasswitz, Hoppe, Michaëlis, Tannery, Venn e Schröder –, mesmo quando assumiram atitudes mais acolhedoras, nela não vislumbraram nenhum progresso no plano científico. Por certo, mais de uma razão contribuiu para que essa obra tenha tido uma acolhida tão fria e inexpressiva. De início, há que se pensar em seu título fortemente descritivo e simultaneamente um tanto alheio ao conteúdo do próprio livro. Em segundo lugar, não se pode excluir o caráter extremamente intricado de seu sistema notacional. Em terceiro lugar, a originalidade temática associada a uma apresentação sumária pode ter sido outro fator de incompreensão. E por fim, outro componente não desprezível seria a carência de uma aplicação imediata ou de possíveis limitações heurísticas. Com isso, seu projeto de precisar as noções básicas da aritmética e dos fundamentos sobre os quais elas se assentam sofreu uma parada, ou um desvio. Em vez de levar mais adiante o desenvolvimento de sua conceitografia e implementar de forma substancial suas aplicações, Frege passou à sua defesa. E assim sendo, logo após a sua publicação, ele redige quatro pequenos artigos onde esclarece e defende as posições assumidas em seu livro[25].

25. São eles: 'Anwendungen der Begriffsschrift' (1879); 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' (1880-1881); 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift' (1882); e 'Über den Zweck der Begriffsschrift' (1882).

Ao escrever o artigo 'Aplicações da Conceitografia'[26], seu principal intuito era 'dar alguns exemplos de como, mediante sua conceitografia, relações aritméticas e geométricas podem ser expressas', relações que não encontram expressão nem na lógica tradicional de orientação aristotélica nem na álgebra booleana[27]. E ele chama a atenção para a generalidade e inespecificidade da conceitografia, dizendo 'que os sinais utilizados não foram especialmente inventados para cada caso particular, mas têm significados tão gerais que os tornam capazes de representar relações as mais diferentes'. Essa obra, na verdade, pode ser considerada como um mero apêndice ou suplemento do livro de 1879. Teoricamente ela nada avança; apenas fornece exemplos concretos que indicam, de modo palpável, a capacidade expressiva de seu sistema lógico. A seguir, Frege escreve o artigo 'A Lógica Calculatória de Boole e a Conceitografia'[28], só postumamente publicado, em que expõe e compara sua conceitografia com o que ele denomina de 'lógica calculatória de Boole'. Nele, Frege mostra que não poderia, para os fins a que se propunha, empregar a lógica de Boole, pois necessitava de um sistema com maiores recursos, e assim defende a superioridade de sua conceitografia em relação à lógica booleana[29]. Derivando ligeiramente para outra forma de abordagem, Frege escreve outro trabalho, menos técnico, 'Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia'[30], que encerra uma maior carga de análise epistemológica e chama a atenção para os 'mal-entendidos' e 'erros' que 'têm origem na imperfeição da linguagem' ordinária. Para tornar possível a exatidão e contornar os inevitáveis equívocos oriundos das linguagens naturais, é necessário que estas sejam substituídas – nos contextos em que for o caso – por uma linguagem logicamente perfeita, isto é, uma conceitografia. E, finalmente, no mesmo ano de 1882, ele profere uma conferência – 'Sobre a Finalidade da Conceitografia'[31] –

26. G. Frege, 'Anwendungen der Begriffsschrift', republicado em G. Frege, *Begriffsschrift*, ed. I. Angelelli, pp. 89-93. Traduzido e publicado no presente volume, cap. 2.
27. Um exemplo intuitivo do que se acabou de dizer poderia ser: 'existe uma infinidade de números primos', enunciado que não pode ser expresso em nenhum desses sistemas, uma vez que nenhum deles dispõe do quantificador existencial.
28. G. Frege, 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift', publicado em G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, 1969, pp. 9-52.
29. Posteriormente, em 1882, escreveu um trabalho menor intitulado 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift', cuja publicação foi rejeitada pelos editores. Cf. G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, pp. 53-59.
30. G. Frege, 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift', G. Frege, *Begriffsschrift*, ed. I. Angelelli, pp. 106-114. Traduzido e publicado no presente volume, cap. 3.
31. G. Frege, 'Über den Zweck der Begriffsschrift', republicado em G. Frege, *Begriffsschrift*, ed. I. Angelelli, pp. 97-106. Traduzido e publicado no presente volume, cap. 4.

cujo tema, como o próprio título sugere, versava sobre a finalidade e os objetivos da conceitografia, polemizando com E. Schröder. Nela, Frege expõe o sistema de Boole e explica porque este não pode substituir seu sistema conceitográfico. Duas razões são apresentadas como relevantes. *In limine*, os objetivos de um e de outro são distintos: Frege visava a construir uma *lingua characterica*, enquanto que Boole se propunha a realizar um *calculus ratiocinator*. Em segundo lugar, o cálculo de Boole não é apto para exprimir todas as expressões e formas de inferência a que Frege visava com sua conceitografia. Daí poder dizer na conclusão do artigo: 'Tivesse ele [Schröder] tentado traduzir para o sistema que diz ser o melhor algumas das fórmulas da terceira parte da minha obra [*Conceitografia*, Terceira Parte], e as que, há algum tempo, tive a honra de lhe apresentar, e teria verificado, na dificuldade desta tarefa, o que há de errôneo em sua concepção'.

Finda a fase por nós definida como "defensiva", Frege elabora *Os Fundamentos da Aritmética. Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número*[32], publicado em 1884, e que sem dúvida é a mais lida, a mais acessível e a mais filosófica de suas obras. Aqui, ele exclui toda notação de natureza lógica ou matemática e desenvolve um minucioso estudo crítico das soluções já apresentadas acerca da noção de número e de outras noções fundamentais da aritmética. E o que ele observa é que os matemáticos não estão aptos nem interessados em investigar esses problemas. 'A maior parte dos próprios matemáticos não está preparada para oferecer uma resposta satisfatória a tais questões. Ora, não é vergonhoso para uma ciência estar tão pouco esclarecida acerca de seu objeto mais próximo, e aparentemente tão simples?'[33] Desse modo, após esboçar seu programa, ele investe contra as concepções dominantes em seu tempo sobre a natureza do número e da verdade aritmética. A parte negativa da obra consiste, essencialmente, no exame das diversas concepções subjacentes às investigações fundacionais de sua época, vale dizer, numa crítica ao formalismo[34] – para o qual os números se reduzi-

32. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Koebner, 1884. Reimpresso sob o mesmo título por G. Olms, Hildesheim, 1961. Há tradução para o português, devida a L. H. dos Santos: *Peirce/Frege*, São Paulo, Nova Cultural, 1989.
33. G. Frege, *Fundamentos*, trad. port., p. ii.
34. *Idem*, § 96. O formalismo que Frege aqui tem em vista é o de Heine, Thomae e Ballue. Trata-se da concepção consoante a qual a matemática se resume a um acervo de símbolos manipulados segundo determinadas regras estruturais. Segundo essa perspectiva, tal como o xadrez, a matemática e a lógica seriam, em essência, apenas jogos envolvendo sinais carentes de todo conteúdo. O formalismo por Frege criticado não se identifica, portanto, com o formalismo hilbertiano, de elaboração posterior, cujo objetivo básico é, aproximadamente, a construção de provas metamatemáticas consistentes e finitistas para a matemática clássica.

riam ao sinal (ou símbolo) enquanto mero objeto material –, ao empirismo[35] – segundo o qual estes seriam meros conceitos empíricos oriundos da percepção de agregados de objetos materiais –, e, finalmente, ao psicologismo[36] – conforme o qual os números seriam objetos de natureza psicológica e subjetiva produzidos pelas leis inerentes ao pensar, levando-se assim a identificar as leis da lógica, de natureza prescritiva, com as leis da psicologia, de natureza descritiva. Frege se insurge radicalmente contra tais concepções e sustenta que os números não se reduzem aos símbolos que os expressam, nem a objetos físicos do mundo empírico e nem a itens mentais do mundo subjetivo de quem os pensa. Finda essa etapa crítica, ele assume uma atitude construtiva em que procura mostrar os procedimentos a serem realizados no sentido de definir e de provar por meios puramente lógicos os conceitos e enunciados da aritmética. Segundo Frege, os números (cardinais) e as demais noções fundamentais da aritmética podem ser definidos com exatidão, em última instância, levando-se em conta apenas as noções da lógica formal, e as proposições acerca dos números podem ser derivadas a partir dos axiomas e das regras de transformação da lógica. Isto equivale a excluir qualquer apelo à intuição, e constitui o que se denomina de 'programa logicista'. Este, se bem que já cogitado de modo mais ou menos impreciso por outros pensadores, só com Frege ganha as bases operatórias que permitiram derivar, por assim dizer, a aritmética da lógica[37]. O logicismo de Frege, porém, tem um escopo distinto do logicismo de Russell, pois enquanto este procurou em seus *Principia Mathematica* reduzir toda a matemática à lógica, Frege divisou essa possibilidade apenas para a aritmética elementar e a análise. Da geometria, no entanto, sempre teve uma concepção

35. *Idem*, p. vii. Seus representantes são Mill, Weierstrass, Kossak e Biermann. Segundo esse ponto de vista, a aritmética seria uma ciência empírica construída indutivamente a partir dos dados da experiência. Por ser uma teoria acerca de objetos físicos, ela não tem um domínio próprio e específico de estudo. Dessa forma, os enunciados existenciais da matemática nada mais seriam do que asserções sobre fatos empíricos, e os axiomas e postulados não passariam de meras generalizações indutivas sobre a experiência empírica.

36. *Idem*, p. v-vii. Seus representantes mais expressivos são Husserl e Erdmann. Erroneamente se atribui a superação do psicologismo a E. Husserl. Na verdade, foi Frege quem pela primeira vez criticou a tese psicologista, vindo assim a influenciar Husserl. Este, porém, nunca reconheceu publicamente tal fato (G. Patzig, *Sprache und Logik*, p. 8, nota 3). Husserl, como se sabe, estudou com extremo cuidado os *Fundamentos* e escreveu alguns comentários na margem de seu exemplar (Frege, *Kleine Schriften*, pp. 431-432). Sobre a posição de Frege e Husserl em face da questão do psicologismo, cf. I. N. Mohanty, *Husserl and Frege*, Bloomington, Indiana U. P., 1982, pp. 18-42.

37. Na fase de elaboração da *Conceitografia*, Frege, ao que parece, ainda não havia concebido o programa logicista. A idéia da redutibilidade da aritmética à lógica é lançada como viável nos *Fundamentos*, mas só efetivamente implementada, por assim dizer, em 1893, nas *Leis Fundamentais da Aritmética*.

distinta. Assim como Kant, ele também admitia que esta seria constituída de verdades sintéticas *a priori*[38], sendo, por tal razão, irredutível à lógica.

Nos *Fundamentos da Aritmética*, Frege desenvolve sua famosa definição de número (cardinal)[39]. No entanto, o programa logicista por ele concebido exigia que tal noção fosse definida em termos estritamente lógicos, o que implicou associar ao sistema lógico uma teoria dos conjuntos, no caso em questão muito similar à de Cantor[40]. Segundo Frege, a lógica sempre se ocupou com as noções de conceito, cair sob um conceito e extensão de um conceito. Em termos lógicos, os números cardinais, diz ele, não podem ser atribuídos a indivíduos (ou coisas), mas apenas a conceitos. Assim, ao afirmarmos que as maravilhas do mundo são sete, na verdade estamos afirmando que sob o conceito *maravilha do mundo* caem sete indivíduos. Dito em outros termos, à pergunta 'Quantas são as maravilhas do mundo?' a resposta que cabe será um número cardinal, e esse número será uma propriedade – entendendo-se essa palavra, no entanto, em um sentido não propriamente predicativo ou atributivo[41] – do conceito de maravilha do mundo. Tais noções, pertencentes à lógica pura,

38. No que concerne à geometria, Frege concorda com Kant que nela existem proposições sintéticas. Mas, no que diz respeito à aritmética, ele discorda da tese kantiana de que suas proposições sejam também sintéticas. Com isso, ele é levado a restringir seu programa logicista à aritmética. Na terminologia de Frege, a aritmética é analítica, vale dizer, redutível à lógica mediante as definições e axiomas da lógica. E portanto, se efetuada esta redução da aritmética à lógica, fica provada sua analiticidade, na acepção que esta palavra tem em Frege. Sabemos, contudo, que o logicismo fregeano não se constitui como uma solução possível.

39. Os números se classificam em ordinais (que indicam a ordem dos distintos elementos das coleções – primeiro, segundo etc.) e cardinais (que indicam a quantidade de elementos distintos das coleções – zero, um etc.). Os números naturais, inteiros, racionais e reais podem ser vistos tanto como ordinais como cardinais – embora, importa ser dito, a noção de cardinalidade em relação aos números não-inteiros positivos seja algo difícil de ser caracterizado pelos critérios que caracterizam a cardinalidade dos naturais. A estrutura dos diversos sistemas numéricos é o objeto de estudo da aritmética, da teoria dos números e da análise real e complexa.

40. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883. Reimpresso posteriormente em G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Hildesheim, G. Olms, 1962, pp. 165-209.

41. Com essa expressão quer-se reiterar a posição fregeana de rejeitar a concepção de número cardinal como um predicado atribuível a classes ou agregados. Cumpre assim salientar a natureza não-predicativa da palavra 'propriedade' no presente contexto (*Fundamentos*, § 22). Com efeito, o número de um conceito F é por Frege definido como a 'extensão de todos os conceitos equinuméricos a F (ou similares a F), sendo assim um "objeto", na medida em que se resume a uma classe cujos elementos são conceitos'. Além do mais, ao predicar o número 7 ao conceito *maravilha do mundo*, não estou, na verdade, predicando 7 a tal conceito; na realidade, o que é feito é uma instanciação universal de uma variável para conceitos, digamos X, a qual satisfaz a definição do número cardinal 7. Eis a definição do número cardinal 7:

$$7 \equiv \hat{X}\,(X \approx (y=0 \vee y=1 \vee y=2 \vee y=3 \vee y=4 \vee y=5 \vee y=6\,)),$$

podem ser "reescritas" em termos conjuntistas utilizando-se a noção cantoriana de potência (*Mächtigkeit*). O que levou Frege a formular sua definição de número cardinal foi, provavelmente, seu estudo sobre Cantor[42]. De fato, não teria sido difícil para Frege notar que aqueles conjuntos que Cantor denomina de 'potência' têm todas as propriedades dos números cardinais.

As noções essenciais envolvidas no conceito cantoriano de potência são: conjunto, pertinência e correspondência de um para um (dos elementos de um conjunto para os elementos de outro conjunto). A partir das noções cantorianas acima mencionadas – que por sua vez permitem a definição conjuntista de número –, Frege percebeu a possibilidade de derivar de sua lógica formal uma teoria dos conjuntos assemelhada à de Cantor[43]. De forma abreviada e pouca precisa, o procedimento é o seguinte: os conjuntos[44] são definidos como extensões de certos conceitos; a pertinência a um conjunto que seja a extensão do conceito *F* pode ser definida como caindo sob o conceito *F*; finalmente, resta definir em termos lógicos a noção conjuntista de correspondência de um para um, que ele pôde realizar utilizando as noções do cálculo dos predicados que ele desenvolvera anteriormente em sua *Conceitografia*. Assim sendo, pode-se definir o número de um conceito *F* como a extensão do conceito equinumérico (ou similar) a *F*. Esta definição pressupõe que se defina o conceito de segunda ordem *equinumérico a F*. Diz-se que um conceito *P* é similar ao conceito *F* se os indivíduos que caem sob *P* estão em correspondência de um para um com os indivíduos que caem sob *F*. Por sua vez, a extensão do conceito *equinumérico a F* pode ser definida como sendo todos os conceitos que satisfazem a relação de equinumericidade com *F*[45]. É importante ter presente que a definição acima não é uma definição de 'número', mas a de 'o número de *F*'. Note-se que seu esforço se centra essencialmente em obter uma definição de

em que '0', '1', '2' etc. são números naturais definidos de maneira estritamente lógica e $\approx$ é a relação de equinumericidade (*Gleichzahligkeit*) entre os conceitos X e o conceito (y=0 v y=1 v y=2 v y=3 v y=4 v y=5 v y=6). Em outras palavras, Frege não diz que 7 é o conjunto de todos os conjuntos de 7 elementos, como o faz Russell, mas o conjunto de todos os conceitos equinuméricos ao conceito (y=0 v y=1 v y=2 v y=3 v y=4 v y=5 v y=6).

42. *Fundamentos*, §§ 85-86, onde é discutida a teoria de Cantor.
43. *Fundamentos*, § 72.
44. Frege, quando escrevia seus *Fundamentos*, acreditava que sua concepção de conjunto fosse idêntica à cantoriana. Posteriormente, ele modificou sua concepção. Cf. resenha de Frege a Cantor, 'Zur Lehre vom Transfiniten', *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100 (1892), pp. 269-272. Republicado em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 163-166.
45. O conceito de 'número que pertence ao conceito *F*' é por Frege definido como sendo a extensão de todos os conceitos equinuméricos a *F* (ou similares a *F*). Todavia, tal relação se dá entre os *objetos* que caem sob os conceitos, e *não* entre os próprios conceitos.

número (cardinal) a partir de noções que sejam, em última análise, estritamente lógicas, e por isso ele parte, como dissemos, da noção de conceito. E, deste modo, ele julgou ter encontrado os meios, ou pelo menos uma orientação, para a redução da aritmética à lógica.

Nos *Fundamentos da Aritmética* ainda não aparece a distinção entre sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*), noções da maior relevância no pensamento de maturidade de Frege. No entanto, nessa obra[46], distinguindo de modo radical as relações entre um objeto e suas propriedades, ele dá um passo decisivo no sentido do estabelecimento dessa distinção. A distinção real entre um objeto e suas propriedades tem, como sabemos, repercussão no plano lingüístico: os objetos sendo designados por nomes próprios[47], enquanto que as propriedades, por expressões predicativas. Por outro lado, um objeto pode, quando for o caso, ser apreendido diretamente pela inteligência – como se dá, por exemplo, com os números – ou indiretamente pela sensação e percepção, isto é, pela apreensão de suas propriedades sensíveis, donde a distinção entre um objeto e suas propriedades corresponder à distinção entre um objeto e seu modo de apresentação. Este último pode ser o da sensação e da percepção, ou ainda o da linguagem, pelo entendimento dos sinais da linguagem. Embora nessa obra Frege ainda não distinga *Sinn* de *Bedeutung*, no entanto, ele agora emprega este último termo com maior especificidade. De fato, ele formula certos critérios básicos quando se tem em vista determinar a *Bedeutung* de um termo. De início, isso só é possível quando se visualiza a integração do mesmo num contexto lingüístico mais amplo: 'somente numa sentença (*Satz*) têm as palavras propriamente um significado (*Bedeutung*)'[48] ou ainda 'deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da sentença, e não isoladamente'[49]. Como tais textos indicam, segundo Frege não faz sentido querer

46. *Fundamentos*, § 21-32.

47. A noção fregeana de nome próprio é mais ampla que a gramatical. Em acepção fregeana, um nome próprio é qualquer expressão que designa um objeto, no sentido que este termo assume em Frege. Nunca pode ser utilizado como predicado gramatical, dada a radical distinção entre objeto e conceito. Sendo assim, nomes próprios gramaticais (*v. g.*, 'Ulisses', 'Niterói'), descrições definidas (*v. g.*, 'O atual Papa') e sentenças (*v. g.*, '2 não é impar') são nomes próprios fregeanos. Uma das mais importantes características do nome próprio é a de ser completo e saturado e, desse modo, eles designam ou se referem a referentes igualmente completos e saturados. Nesta acepção, só não é nome próprio a expressão cujo referente for uma função ou uma relação.

48. *Idem*, § 60.

49. *Idem*, p. x. Fundamentos desse princípio é o que manifesta o modo pelo qual apreendemos os números: mediante uma sentença de igualdade numérica em que são postos os objetos que caem sob o conceito *F* numa correspondência biunívoca com os objetos que caem sob o conceito *G*. Cf. *Fundamentos*, § 62.

determinar o significado de um termo, a não ser em um contexto sentencial, pois somente aí ganha esse conteúdo significativo a possibilidade de vir a ser definido. Tal modo de encarar o significado se apóia na concepção segundo a qual o significado de uma palavra pode vir a ser estabelecido mediante a noção de contribuição (*Beitrag*) da palavra ao contexto em que ela ocorre. Isto não implica dizer que as palavras, quando isoladas, careçam de significado, mas que seu significado só é conhecido mediante a função que desempenha em contextos mais complexos. Mas importa notar que esse princípio, embora necessário, não é suficiente para configurar a *Bedeutung* de uma expressão. De fato, Frege propõe um segundo princípio. Assim, escreve ele, 'deve-se separar nitidamente o psicológico do lógico, o subjetivo do objetivo'[50]. Este princípio não só é fundamental, como está profundamente vinculado ao princípio anterior, isto é, ao princípio do contexto. Caso não se observe o primeiro, 'fica-se quase que obrigado a tomar como a *Bedeutung* das palavras, imagens internas e atos da mente individual', e assim a transgredir o segundo princípio[51]. Essa tese, como se vê, está em radical oposição ao psicologismo.

Mediante esses dois princípios, Frege visa a mostrar que o significado (*Bedeutung*) de uma expressão não pode ser de natureza subjetiva ou individual. Através de sua teoria do significado, ele encontra os fundamentos para sua conceitografia, e isto mediante os seguintes pressupostos: i) os objetos existem; ii) os números são um subconjunto deles; iii) os objetos são cognoscíveis; e iv) a aritmética tem neles seu conteúdo[52]. Mas o desenvolvimento e as conseqüências desses princípios, estabelecidos em seus *Fundamentos*, só se darão anos mais tarde, quando seu pensamento atingir a maturidade.

Apesar de todos os esforços empreendidos para tornar os *Fundamentos da Aritmética* uma obra atraente, sua repercussão não foi melhor que a de seu primeiro livro. Mesmo os especialistas mais proximamente vinculados aos temas nele versados mostraram a mais absoluta indiferença. As resenhas que mereceu de Hoppe, Lasswitz e Cantor não foram nem exaustivas, nem favoráveis. Desse

Este princípio veio a ser denominado de 'princípio do contexto' (*Satzzusammenhange*). Cumpre notar que, nesse momento, Frege ainda não decompusera o significado em sentido, de um lado, e referência, de outro, e assim não se pode dizer que esse princípio se aplicaria, em última análise, ao sentido ou à referência. Se aplicável ao sentido, ele reforçaria a teoria fregeana de que o sentido dos componentes da sentença consiste em sua contribuição ao sentido da sentença como um todo. Se aplicável à referência, reforçaria outra teoria fregeana segundo a qual é suficiente aos termos terem referência para que ocorram como componentes de sentenças que tenham referência.

50. *Idem*, p. x.

51. *Idem*, *ibidem*.

52. R. Egidi, *Ontologia e Conoscenza Matematica*, Firenze, Sansoni, 1963, p. 25.

modo, o livro passou despercebido por mais de duas décadas, excetuando-se as observações que Husserl lhe faz em sua obra *Filosofia da Aritmética*[53].

Não obstante o desinteresse em torno de sua obra, Frege não abandona suas investigações. Em 1885, profere uma conferência em Jena sobre as teorias formais a respeito da aritmética[54], onde discute em que medida, segundo sua concepção, uma aritmética pode ser dita formal. Mais tarde, entre 1891 e 1892, escreve três artigos da maior importância e originalidade. E aqui seu pensamento atinge a completa maturidade. Deste modo, pôde ele contrastar os resultados oriundos de sua *Conceitografia* e dos *Fundamentos da Aritmética* com os recentes desenvolvimentos obtidos em seus trabalhos *Função e Conceito* (1891), 'Sobre o Sentido e a Referência'(1892) e 'Sobre o Conceito e o Objeto' (1892) – que na atualidade são, sem dúvida, as obras mais lidas, estudadas e discutidas de Frege[55].

Essencialmente, sua contribuição centra-se numa discussão visando a clarificar, de um lado, as noções de objeto, conceito e função, e as relações que se dão entre as mesmas, e, de outro, as noções de sentido e referência. Constituem, assim, o núcleo de sua ontologia e de sua filosofia da linguagem. A retomada dessas discussões é feita, de início, no opúsculo *Função e Conceito*, de 1891. Aí, ele generaliza ainda mais a noção de função, e introduz a dicotomia função/argumento em sua análise da sentença[56]. Além disso, entende que as sentenças (*Sätze*)[57] são nomes próprios de dois objetos: o verda-

53. E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen*, Halle – Salle, Pfeffer, 1891, pp. 129-134.

54. G. Frege, 'Über formale Theorien der Arithmetik', *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 19 (1885-1886), pp. 94-104. Republicado em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 103-111.

55. Esses três trabalhos encontram-se traduzidos na presente obra, caps. V, VII e VI.

56. A teoria fregeana da sentença (*Satz*) pode ser resumidamente exposta nas seguintes palavras. Uma sentença é um nome próprio plurivocabular que expressa um pensamento e, se for uma asserção, refere-se a um valor de verdade. De um ponto de vista puramente estrutural, a mais simples das sentenças (vale dizer, uma cadeia gráfica ou sonora) é constituída, de um lado, por um nome de objeto e, de outro, por um termo predicativo. Uma sentença assertiva é uma expressão totalmente completa e saturada. De um ponto de vista semântico, o nome de objeto expressa um sentido e designa um objeto, enquanto que o termo predicativo expressa o sentido do termo predicativo e se refere a um conceito; e a sentença em sua totalidade expressa um sentido (que Frege denomina de 'pensamento') e designa ou se refere a um objeto que em seu entender é um valor de verdade: o verdadeiro ou o falso. Segundo Frege, todo nome de objeto tem que se referir a um objeto. Quando esse inexistir – tal como em 'O maior número real' – associa-se arbitrariamente a título de referente o número zero.

57. 'A palavra sentença (*Satz*) é usada de diversos modos [...] Contudo, não é propriamente a sentença que importa quando falamos, mas o sentido ou conteúdo vinculado à sentença e que se procura comunicar [...] É assim que se associam a sentença e o sentido da sentença, [isto é,] o sensível e o não sensível. Chamo pensamento o sentido de uma sentença dotada de sentido (*sinnvollen Satzes*). Os pensamentos são verdadeiros ou falsos' G. Frege, *Nachgelassene*, p. 182.

deiro (*das Wahre*) e o falso (*das Falsche*). Objeto é, em seu entender, qualquer coisa que possa ser designada por um nome próprio e que possa exercer o papel de argumento ou valor de uma função. Por outro lado, um objeto tanto pode ser um ente físico (como a lua) quanto lógico (*v. g.*, os números). Função (*Funktion*) e objeto (*Gegenstand*) são os dois aspectos fundamentais da realidade. Tudo quanto existe, este termo tomado em sua acepção a mais ampla, ou é função ou objeto. Esses dois modos de ser são irredutíveis: nada pode ser, simultaneamente, função e objeto. Nenhuma função é um objeto; e nenhum objeto é uma função. Lingüisticamente, os objetos são designados por nomes próprios, enquanto que as funções o são por expressões funcionais. Nenhuma expressão funcional designa um objeto; e nenhum nome próprio designa uma função. Função e objeto, por serem simples, indecomponíveis e inanalisáveis, são também indefiníveis. Para entender o que é uma função ou o que é um objeto, o que cabe ser feito é observar como as expressões funcionais e os nomes próprios são utilizados. Frege entende ainda que as funções são incompletas ou insaturadas, enquanto que os objetos são completos e saturados[58]. Por exemplo, a expressão funcional 'seno', 'seno ( )' ou então 'seno ξ' exige ser complementada por um nome – como, '0', '1', '2' etc. –, originando assim expressões saturadas da forma 'seno 0', 'seno 1', 'seno 2' etc. Após a complementação, o sinal funcional se converte em um nome de um objeto. As funções se hierarquizam em funções de primeira ordem – aquelas cujos argumentos são objetos –, de segunda ordem – cujos argumentos são funções de primeira ordem – e assim por diante. Uma função pode ter um ou mais argumentos. Frege introduz a seguir a noção de conceito (*Begriff*), que ele também entende que por ser logicamente simples e indecomponível não pode ser definido. Contudo, para entender sua natureza, cumpre determinar como as expressões conceituais são utilizadas. Assim, ele nos diz que o conceito é um caso especial de função: todo conceito é uma função, mas nem toda função é um conceito. Conceitos são funções de um único argumento cujo valor é o verdadeiro ou o falso, os dois valores de verdade. Com este significado, 'conceito' nada tem em comum com 'idéia', 'representação' ou 'noção', quando com tais palavras se quer exprimir algum tipo de item intelectual ou alguma forma de experiência psicológica. Eles podem ser ou não apreendidos pela inteligência, mas não são em absoluto produto da inteligência e nem são obtidos por abstração.

58. Frege destaca três tipos de objetos: i) as referências dos nomes próprios individuais; ii) as extensões dos conceitos; e iii) os valores de verdade.

Exemplos de conceito, nesta acepção, seriam as funções '... é par' ou '... não é impar'[59]. Assim como as funções, os conceitos também se estratificam em níveis: conceito de primeiro nível, conceito de segundo nível etc. Dada sua natureza funcional, todo conceito também é insaturado e incompleto, e só se satura ou completa pela ação de um argumento, que no caso dos conceitos de primeiro nível é sempre um objeto.

No ano seguinte, em 1892, publica o seu famoso artigo 'Sobre o Sentido e a Referência', onde aprofunda e desenvolve a questão semântica. De início, ele diz que a sentença 'A estrela da manhã é igual à estrela da manhã', por ser uma instância do princípio de identidade, nada informa de original. Mas, a sentença 'A estrela da manhã é igual à estrela da tarde' expressa uma importante informação astronômica. Desse modo, é possível alguém admitir a primeira e rejeitar a segunda. Elas diferem, portanto, naquilo que Frege chama de 'valor cognitivo' (*Erkenntniswert*). O objetivo desse artigo é, à primeira vista, explicar a diferença entre essas duas espécies de sentença. Mas na realidade, ele se propõe a expor uma teoria semântica de aplicabilidade muito mais ampla e irrestrita. Aqui, a noção de conteúdo (*Inhalt*)[60], sistematicamente empregada em obras anteriores, é decomposta em sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*). Desse modo, toda expressão (isto é, nome próprio, termo conceitual, sentença) expressa um sentido e designa um referente. O referente de uma expressão é aquilo que ela designa. Assim, os termos '2 + 2' e '6 – 2' se referem ou designam o mesmo referente, isto é, 4. De modo geral, uma sentença se refere ou designa seu valor de verdade, isto é, o verdadeiro ou o falso[61]. O referente de

59. No que tange ao conceito, podemos dizer que Frege se propõe a estabelecer o que ele é, a distinguir entre conceito e extensão de um conceito, explicar as diversas hierarquias de conceitos, fixar a relação de um conceito cair em outro conceito, dizer em que consiste a subordinação de um conceito de primeiro nível em outro conceito também de primeiro nível e ainda evidenciar a subsunção (cair sob) de um individuo sob um conceito.

60. O termo *Inhalt*, 'conteúdo', é o que Frege utiliza até este momento para designar o aspecto significativo do sinal. Dada a extensão dessa noção, nem sempre é fácil determinar em que acepção exata esta palavra está sendo tomada. Tal é o motivo que levou Frege a substituí-la por *Sinn*, 'sentido', e *Bedeutung*, 'referência'.

61. Eis como Frege argumenta de modo a estabelecer essa tese. Para determinar o referente de uma sentença basta ter presente o que se altera quando expressões correferentes (isto é, de mesma referência) são substituídas nessa sentença. Dado que o referente de uma sentença é determinado pelos referentes de seus componentes, segue-se que ao substituirmos uma expressão dessa sentença por outra correferente, o que se mantém é o valor de verdade, e o que se altera é seu sentido. Com isto, expressões correferentes são substituíveis entre si preservando o valor de verdade da sentença, vale dizer, seu referente. Logo, o valor de verdade de uma sentença é o referente dessa sentença. Para Frege, toda sentença é um nome próprio (ou termo singular) e todo valor de verdade é um objeto. Assim, a sentença '2 + 2 = 4' é um nome próprio de o verdadeiro. Todas as sentenças verdadeiras têm o mesmo referente (isto é, o ver-

uma expressão complexa (ou sentença) é função dos referentes de seus componentes e não de seus sentidos – o que mais tarde veio a ser denominado de 'tese composicional da referência'. Por outro lado, o sentido de uma expressão é o modo pelo qual essa expressão determina ou apresenta (*Bestimmungsweise* ou *Art des Gegebenseins*) seu referente. Como vimos, os dois termos acima têm o mesmo referente, mas o primeiro se refere ao número 4 de um modo (isto é, através de uma adição), enquanto que o segundo se refere a esse número de outro modo (isto é, mediante uma subtração). O modo de apresentar ou determinar o referente é o que constitui o sentido de uma expressão, seja esta uma palavra isolada, seja uma sentença completa. O que acabamos de dizer é plenamente compatível com o fato de um referente (o mesmo objeto) poder ser determinado ou apresentado de distintos modos; basta para tanto tomar duas (ou mais) expressões de sentido distintos nas equireferenciais – como 'o autor do *Timeu*' e 'o mestre do mestre de Alexandre III'. Fato que prova que, em dada expressão, sentido e referência não se identificam. No caso particular das sentenças, seu sentido é o que ele denomina de 'pensamento' (*Gedanke*). Em outros termos, uma sentença assertiva expressa um pensamento, e este pensamento vem a ser o sentido da sentença. Ele ainda distingue nitidamente a *apreensão* de um pensamento de seu *reconhecimento* como verdadeiro. Eis o que Frege escreve em seu trabalho inédito 'Minhas Concepções Lógicas Fundamentais', que a seguir traduzimos. 'Se alguém reconhece algo como verdadeiro, então faz um juízo. O pensamento é o que ele reconhece como verdadeiro. Não se pode reconhecer um pensamento como verdadeiro sem antes apreendê-lo. Um pensamento verdadeiro já era verdadeiro antes de ser apreendido por alguém. Um pensamento não necessita de um ser humano como portador. O mesmo pensamento pode ser apreendido por diversos seres humanos. O julgar não modifica o pensamento reconhecido como verdadeiro'[62]. De modo geral, o sentido e a referência são os dois componentes semânticos indispensáveis para dar conta da expressividade ou conteúdo das expressões. Portanto,

dadeiro) e todas as sentenças falsas também (isto é, o falso). Só uma sentença, contudo, pode ser objeto de uma asserção. Este duplo aspecto da sentença – isto é, o de ter um valor de verdade e o de ser asserível – já encontramos nos estóicos. 'Uma sentença é aquilo que é verdadeiro ou falso... uma sentença é o que é capaz de ser asserido ou não' (Diógenes Laércio, *Vidas*, VII, 65). (Note-se que é impossível desenvolver a filosofia da linguagem e da matemática sem o substantivo 'asserção' e o verbo 'asserir' ou equivalente, verbo cuja existência nem sempre é reconhecida por todos os lexicógrafos!).

62. Cf. *infra* pp. 211-212. Importa também distinguir o pensamento principal ou propriamente dito daquilo que Frege veio a denominar de *Nebengedanke*, 'pensamento secundário', que encerra matizes, nuances e coloridos que se agregam ao pensamento principal sem nada contribuir de essencial para o aspecto lógico do primeiro. Cf., cap. 7, n. 71.

as variações semânticas no âmbito das expressões ocorrem ou no plano do sentido ou no plano do referente[63]. Uma expressão, porém, pode ter sentido mas carecer de referente – por ex., 'Ulisses', 'O atual rei do Brasil'. Situações mais complexas que as acima descritas podem ocorrer quando o sujeito de uma sentença é ele próprio uma sentença. De fato, a sentença 'Que a estrela da manhã é um planeta é admitido por *X*' pode ter um valor de verdade diferente do da sentença 'Que a estrela da tarde é um planeta é admitido por *X*', embora as sentenças componentes que nelas ocorrem tenham o mesmo valor de verdade. Isto se deve ao fato de *X* poder admitir uma e rejeitar a outra. Nesses contextos, diz Frege, o referente da sentença componente não é seu referente costumeiro, mas o que é ordinariamente seu sentido. Nesse artigo, Frege enuncia três importantes teses sobre as relações entre sentido e referência: i) é o sentido da expressão que determina seu referente; ii) duas expressões de mesmo sentido designam o mesmo referente; e iii) duas expressões correferentes podem não expressar o mesmo sentido[64]. Estabelecidas essas distinções, Frege observa que uma sentença da forma '*A*=*A*' difere de uma sentença da forma '*A*=*B*' quanto ao sentido que os nomes '*A*' e '*B*' apresentam, e não quanto ao referente desses nomes. Portanto, nessas duas sentenças de igualdade os nomes que nelas ocorrem apresentam o mesmo referente, mas discrepam quanto ao modo de apresentação do referente. Mais tarde, ele virá a defender a tese segundo a qual a dicotomia sentido/referência se aplica não só aos termos singulares (ou nomes próprios), mas também às expressões funcionais[65].

63. Além do referente e do sentido de um sinal, Frege reconhece a existência de um terceiro componente por ele denominado de *Vorstellung*, 'idéia', como aqui traduzimos. Em oposição ao sentido, que é apreendido pelo sujeito mas não é produzido por ele, a idéia de alguém sobre um objeto é uma imagem subjetiva, pessoal, freqüentemente carregada de emoções e, como tal, incomunicável. 'Um pintor, um cavaleiro e um zoólogo – diz Frege – provavelmente associarão idéias muito diferentes ao nome "Bucéfalo"'. Ao contrário do sentido, as idéias são modificações da inteligência individual, pertencem ao mundo interior e subjetivo do sujeito e, por tal razão, não só necessitam como também dependem de um portador. Cf. G. Frege, *Investigações Lógicas*, Porto Alegre, EDIPUCRS, p. 23ss. Importa porém não esquecer que a palavra *Vorstellung* só passa a ter o significado acima descrito a partir de 1884, ano em que foram publicados os *Fundamentos da Aritmética*; e mesmo após essa data, ela foi com frequência utilizada em vários de seus trabalhos em sua acepção corrente e padrão da "noção" ou "conceito geral".

64. Segundo Frege, a tese composicional também se aplica ao sentido das sentenças: o sentido de uma sentença é determinado pelos sentidos de seus componentes, já que os pensamentos são também compostos de sentidos das partes da sentença. Como decorrência deste fato, em princípio o sentido de uma sentença é preservado sempre que um componente da sentença for substituído por outro de mesmo sentido; e alterado sempre que um componente da sentença for substituído por outro componente de sentido distinto. Sendo assim, o sentido de uma sentença em nada depende do referente de seus componentes.

65. Cf. G. Frege, 'Ausführungen über Sinn und Bedeutung', cuja tradução se encontra publicada no presente volume, cap. 8.

Nesse mesmo ano, aparece o artigo 'Sobre o Conceito e o Objeto', onde procura desfazer os equívocos acerca de sua noção de conceito tal como fora formulada nos *Fundamentos da Aritmética.* Como esse livro não desenvolve com a devida clareza o que Frege entende por conceito, o filósofo e lógico Benno Kerry (1858-1889) foi levado a dizer que a noção fregeana de conceito é inconsistente; pois Frege se utiliza para falar do conceito *F* da expressão 'o conceito *F*', expressão esta que fregeanamente falando é, por conter o artigo definido, um nome próprio, e assim não pode ter como referente um conceito, mas um objeto. Do mesmo modo, a expressão 'o conceito cavalo' deveria supostamente designar um conceito, mas por ser também um nome próprio só pode designar um objeto. O que constitui, conclui Kerry, uma inconsistência. Respondendo à objeção de Kerry, Frege nega que tenhamos aqui uma inconsistência, dadas as limitações da linguagem corrente para expressar com clareza os aspectos da distinção conceito/objeto. A argumentação de Frege tem por base o fato de que conceito e objeto são logicamente simples, indecomponíveis e por tal razão não podem ser propriamente definidos senão no âmbito da conceitografia, mediante a distinção entre nomes próprios e expressões funcionais, conjuntamente com os diferentes quantificadores. Desse modo, ele se recusa a admitir a tese de Kerry segundo a qual um objeto, eventualmente, pode vir a ser um conceito, consoante as situações ou contextos. Para Frege um objeto cai sob um conceito caso o conceito lhe assinale como valor o verdadeiro. Um conceito cai em outro conceito (ou está subordinado a outro conceito) se todos os elementos que caem sob o primeiro caírem também sob o segundo. Em síntese, esses três artigos mostram que a ontologia fregeana por assim dizer gravita em torno de dois temas centrais: função e objeto. Sobre estes cumpre discutir em que medida e de que modo se pode afirmar que existem, qual sua objetividade e de que forma, caso seja possível, é dado falar a seu respeito. Ele também admite que as verdades sobre tais entes não só são eternas como também independem de nós e de nossas consciências – o que veio a ser chamado mais tarde de 'platonismo fregeano'[66]. Por outro lado, ele também sustenta que todas as variedades de entes só podem estar "distribuídas": i) no espaço físico exterior; ou ii) no mundo interior de nossa consciência; ou, por

66. No contexto da filosofia da matemática, platonismo é, de modo geral, qualquer doutrina que admite que números, classes, relações, propriedades, proposições, conceitos etc. são objetos independentes, reais, intemporais e objetivos. Segundo o platonismo, portanto, tais entes não são criações ou invenções, mas descobertas da inteligência humana. A palavra 'platonismo', na presente acepção, parece ter sido usada pela primeira vez em 1935, pelo lógico suíço Paul Bernays.

fim, iii) em um terceiro domínio no qual se encontram os números, conceitos, relações, funções, pensamentos (isto é, sentido das sentenças) e os sentidos das demais expressões.

Muitos anos depois, todas essas investigações tiveram amplas e profundas repercussões sob a lógica e a filosofia, e deram origem a complexas discussões em ontologia, teoria do conhecimento e filosofia da linguagem.

Em 1893, quatorze anos após a publicação de sua *Conceitografia*, Frege publica o primeiro volume de sua monumental obra *Leis Fundamentais da Aritmética Derivadas Conceitograficamente*[67], em que procura, com extremo rigor, levar a cabo seu projeto de redução da aritmética à lógica efetuando todas as demonstrações de acordo com o mais rigoroso formalismo. 'Disto pode-se depreender que os anos não passaram em vão desde o aparecimento de minha *Conceitografia* e dos *Fundamentos*; eles trouxeram minha obra à maturidade'[68]. No início dessa obra ele apresenta o método que procurará seguir na reconstrução lógica da aritmética com as seguintes palavras: 'O ideal de um método estritamente científico em matemática, que aqui procurei realizar, e que talvez possa ser denominado de euclidiano (*nach Euklid bennant*), gostaria de descrever do seguinte modo. Não se pode decerto pretender que tudo seja demonstrado, uma vez que isto é impossível; mas podemos exigir que todas as proposições utilizadas sem demonstração sejam expressamente declaradas como tal, para que possamos ver claramente em que repousa a totalidade da construção. A seguir devemos tentar reduzir ao mínimo o número dessas leis primitivas, demonstrando tudo o que possa ser demonstrado. Além disso, exijo – e nisto vou além de Euclides – que previamente se enumerem todos os métodos de inferência (*alle Schluss- und Folgerungsweisen*) utilizados. Do contrário, não podemos estar seguros de estar satisfazendo a primeira exigência. No essencial, creio ter alcançado este ideal'[69]. Mas para a implementação de seu programa é indispensável apresentar a aritmética como um sistema axiomatizado. Ao tentar porém construir essa axiomática, ele constata que nem seus termos primitivos, nem suas proposições primitivas tinham que ser termos ou proposições da aritmética. Pelo contrário, sua grande descoberta é a de que todos esses componentes podem ser derivados da conceitografia. Nesse sentido, ele reconstrói seu sistema formal de 1879 imprimindo o mais

67. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. I, 1983. Posteriormente republicado, sob o mesmo título, por G. Olms, Hildesheim, 1962.

68. *Idem*, p. x.

69. *Idem*, p. vi.

alto padrão de rigor formal. A axiomática aqui utilizada difere da que encontramos na *Conceitografia* pelo fato de envolver um número menor de axiomas e maior de regras dedutivas. Uma teoria ingênua dos conjuntos é também introduzida. Além dessas modificações, ele torna a explicar seu sistema notacional, a teoria dos números cardinais[70] (nada é dito a respeito dos ordinais), a noção de ordenação numa seqüência, e chega a provar os axiomas de Peano. Ele vai além e estende a possibilidade da teoria logicista aos números reais, estabelecendo um conjunto de resultados iniciais. Isto, contudo, seria o objeto do terceiro volume das *Leis Fundamentais*, que nunca chegou a ser escrito. Além disso, tece diversas digressões de natureza filosófica – tais como o anti-psicologismo, a crítica ao formalismo e outros tópicos afins. Aprofunda ainda mais sua noção de função, desenvolve a teoria da descrição e do artigo definido, fixa um conjunto de princípios reguladores para a definição, e distingue o uso da menção de um sinal. Tais temas, em essência, de um modo ou de outro já tinham sido acenados e discutidos em obras anteriores. Isto, porém, não tira desse livro seu grande valor no que concerne à originalidade temática, à precisão conceitual e à exatidão das demonstrações.

A recepção dessa obra foi extremamente fria. Apenas duas resenhas apareceram a seu respeito, uma por R. Hoppe e outra por G. Peano, e ambas desfavoráveis. Isto, no entanto, não arrefeceu seu ardor de levar a termo o projeto logicista. Mesmo porque esse volume encerrava apenas uma parte de tudo quanto teria de desenvolver para completar seu intento de reduzir a aritmética à lógica. Desta forma, o primeiro volume como que estaria a exigir um segundo que o viesse a completar. No entanto, ele não o fez de imediato. Antes de o segundo volume ser impresso, o que só ocorrerá dez anos mais tarde, Frege publicou seis artigos versando sobre sua conceitografia e a noção de número. Assim, um ano depois, em 1894, publica uma resenha à *Filosofia da Aritmética* de E. Husserl, em que analisa e critica o psicologismo do criador da fenomenologia. Esse trabalho causou tal impressão em Husserl que o levou não só a abandonar o psicologismo como a se converter em um de seus ardorosos adversários. No ano seguinte, em 1895, vem à luz seu artigo 'Elucidações Críticas a Alguns Tópicos de E. Schröder, *Lições de Álgebra da Lógica*', onde rebate a afirmação de Schröder de que sua lógica

70. Fregeanamente falando, número não é um conceito obtido por abstração; ele tampouco é um agregado de coisas; ele também não é uma propriedade; e nem é um conjunto. Como se vê, não há na definição fregeana de número lugar para a intuição, e assim as sentenças da aritmética são analíticas (derivadas da lógica) e não sintéticas *a priori*.

seria superior à de Frege. Este retruca mostrando que toda a argumentação de Schröder se apóia num emaranhado de equívocos e incompreensões. Nesse mesmo ano, escreve um breve artigo intitulado 'O Número Inteiro', em que discute a concepção formalista de E. Ballue a respeito de número inteiro. Em 1896, envia uma carta a G. Peano em que responde a cada uma de suas críticas a seu livro *Grundgezetze.* Também no ano de 1896 vem à luz seu artigo 'Sobre a minha Conceitografia e a do Sr. Peano' em que expõe de modo detalhado seu sistema conceitográfico e o compara com o de Peano, mostrando a visível superioridade do primeiro em relação ao segundo. Por fim, em 1899, publica o opúsculo 'Sobre os Números do Sr. H. Schubert', em que critica e satiriza o verbete que este escrevera sobre o conceito de número para uma enciclopédia de ciências matemáticas. Além de toda essa produção, Frege ainda escreveu outros artigos que só recentemente foram publicados[71].

Em 1902, a redação do segundo volume das *Leis Fundamentais da Aritmética*[72] estava praticamente concluída, e Frege sentia-se totalmente realizado no que respeita à concretização de seu projeto, uma vez que, nessa obra, ele acreditava ter efetivamente demonstrado, de uma vez por todas, que a aritmética tem seu fundamento na lógica. Assim, após discutir minuciosamente a lógica psicologista, que crê ser indefensável, afirma que todo o segundo volume de suas *Leis Fundamentais da Aritmética* é, na verdade, 'uma demonstração de minhas concepções lógicas. De saída, é pouco provável que semelhante edifício pudesse ser construído sobre um fundamento inseguro ou errôneo. Quem quer que tenha outras concepções, poderá tentar construir sobre estas uma construção semelhante e verá, penso eu, que não funciona ou pelo menos que não funciona tão bem. Como refutação, só poderia admitir que alguém mostrasse efetivamente seja que com concepções básicas distintas pode-se edificar algo de melhor ou de mais sólido, seja que meus princípios levam a conseqüências visivelmente falsas. Isto, porém, ninguém conseguirá'[73]. Nessa obra, ele desenvolve conceitograficamente as noções de número negativo, racional, irracional e complexo, além das operações usuais

71. Todos esses trabalhos foram republicados em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 179-261.

72. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, vol.II, 1993. Jena, H. Pohle, 1903. Republicadas, conjuntamente com o primeiro volume, sob o mesmo título, por G. Olms, Hildesheim, 1962.

73. *Grundgesetze*, I, p. xxvi. Segui proximamente a tradução de U. Moulines, G. Frege, *Estudios sobre Semántica*, Barcelona, Ariel, 1971, p. 155.

entre os elementos dessas espécies numéricas, encerrando assim a discussão em torno das noções essenciais não só da aritmética, mas da própria análise[74]. No entanto, em junho de 1902, Bertrand Russell escreve-lhe uma carta mostrando que seu sistema era inconsistente, vale dizer, que implicava um paradoxo que se tornou posteriormente conhecido como o 'paradoxo de Russell'. Em termos mais precisos, além do aparato estritamente lógico, o sistema das *Leis Fundamentais* encerra ainda uma teoria ingênua dos conjuntos[75] de que Frege se utiliza para definir a noção de número, e que torna possível a emersão do paradoxo Russell. Este paradoxo diz respeito ao conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos: se E é um elemento de E, então é elemento do conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos, logo E não é elemento de E. Mas se E não é elemento de E, então não é elemento do conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos, donde ele tem que ser elemento de si mesmo, isto é, E é um elemento de E. E assim se arma a contradição: E é elemento de si próprio se e somente se E não for elemento de si próprio[76]. Especificamente, este paradoxo decorre de sua Lei Fundamental V[77], lei esta sobre a qual o próprio Frege tinha algumas

74. A palavra 'análise' (ou 'análise infinitesimal', 'análise superior','análise pura' ou 'análise matemática') designa de maneira ampla a área da matemática que trata das grandezas contínuas (sistema dos números reais) em oposição à aritmética que versa sobre as grandezas discretas (teoria dos números naturais). Em sentido tradicional, a análise matemática compreende o cálculo diferencial e integral, a teoria das equações diferenciais, o cálculo das variações e a teoria da medida.

75. Em outras palavras, uma teoria que encerra o pressuposto de que dada uma propriedade sempre existe um conjunto que tem como membros exatamente aqueles objetos que apresentam essa propriedade. Tal pressuposto é, com freqüência, chamado de 'esquema de compreensão irrestrita de Cantor'. Todas as axiomáticas atuais da teoria dos conjuntos evitam o paradoxo de Russell ao restringir os princípios que enunciam a existência de conjuntos. E a forma mais simples de restringir o esquema de compreensão irrestrita é substituí-lo pelo axioma conhecido pela designação de 'esquema de separação', que pode ser assim enunciado: dado um conjunto X e uma propriedade, existe um conjunto cujos membros são exatamente aqueles membros de X que apresentam essa propriedade.

76. O paradoxo de Russell foi publicado pela primeira vez, em 1903, nas *Leis Fundamentais*, II, pp. 253-265. Mas nesse mesmo ano Russell o divulgou em seus *Principles of Mathematics*, Londres, 1903, pp. 101-107. No entanto, hoje sabemos que antes de 1903 E. Zermelo já tivera conhecimento desse paradoxo.

77. Esta lei pode ser assim representada $[\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\gamma}g(\gamma)] = (x)\,(f(x) = g(x))$, expressão que enuncia que dois percursos de valores são iguais se e somente se as funções correspondentes assumirem os mesmos valores para os mesmos argumentos. Cf. *Grundgesetze*, I, p. 36. (Em se tratando de conceitos, esta lei assume a seguinte feição $[\hat{x}\,f(x) = \hat{x}g(x)] \leftrightarrow (x)\,(f(x) \leftrightarrow g(x))$, vale dizer, a extensão do conceito f é igual à extensão do conceito g se e somente se os mesmos objetos que caírem sob f também caírem sob g, e reciprocamente). Este princípio imprime à lógica fregeana um perfil conjuntista e extensional, fazendo que todo conceito tenha uma extensão constante e imutável. Cumpre observar que a Lei Fundamental V é, como veremos na nota a seguir, uma equivalência lógica, o que acarreta que ela seja – segundo Frege – uma verdade analítica.

restrições[78], mas essencial para a obtenção da aritmética a partir da lógica, pois ela abre a possibilidade de admitir que a toda função (e a todo conceito) corresponde um percurso de valor. Esta lei diz o seguinte: o percurso de valor da função f – isto é, $'\varepsilon f(\varepsilon)$ –, será igual ao percurso de valor da função g – isto é, $'\gamma g(\gamma)$ –, se e somente se as funções f e g tiverem os mesmos valores para os mesmos argumentos.

Ao tomar conhecimento da carta de Russell, sua reação foi de profunda decepção e melancolia. 'Nada mais triste pode ocorrer a um autor de uma obra científica, após o término da mesma, do que ver estremecer um dos fundamentos de sua construção. Nesta situação fui colocado por uma carta do Sr. Bertrand Russell, exatamente quando se consumava a impressão deste [segundo] volume'[79]. No verão de 1902, Frege tentou encontrar uma saída para o paradoxo de Russell. No ano seguinte, aparece o segundo volume das *Leis Fundamentais da Aritmética*, no qual, em apêndice, ele dá a conhecer a descoberta de Russell, e exibe a solução que acreditava resolver o problema: uma versão atenuada de sua quinta lei fundamental[80].

78. Por ser uma equivalência, o Axioma ou Lei fundamental V se desdobra em duas implicações:

$$['\varepsilon f(\varepsilon) = '\varepsilon g(\varepsilon)] \rightarrow (x)\,(f(x) = g(x))$$

e esta outra

$$(x)\,(f(x) = g(x)) \rightarrow ['\varepsilon f(\varepsilon) = '\varepsilon g(\varepsilon)].$$

É especificamente o primeiro enunciado que induz o paradoxo de Russell. Em se tratando porém de conceitos, esta lei assume a seguinte feição $[\hat{x} f(x) = \hat{x} g(x)] \leftrightarrow (x)\,(f(x) \leftrightarrow g(x))$, vale dizer, a extensão do conceito f é igual à extensão do conceito g se e somente se os mesmos objetos que caírem sob f também caírem sob g, e reciprocamente.

79. *Grundgesetze*, II, p. 253. Ainda que o paradoxo de Russell tenha invalidado parte do sistema formal das *Leis Fundamentais*, mesmo assim é possível, validamente, deduzir os Axiomas de Peano de um único princípio, conhecido sob o nome de Princípio de Hume, que é expresso pela seguinte equivalência lógica: o número que pertence ao conceito F é igual ao número que pertence ao conceito G se e somente se o conceito F for equinumérico ao conceito G. Se o Princípio de Hume for uma verdade lógica, então as verdades da aritmética são conseqüências de uma verdade lógica e, assim, seriam também verdades lógicas. Mas que este princípio seja uma verdade lógica é algo de muito controvertido. Mais tarde veio a se chamar de Teorema de Frege a dedução lógica (de segunda ordem) dos Axiomas de Peano a partir do Princípio de Hume. Este teorema, isoladamente, já mostra que sua tentativa de reduzir a aritmética à lógica não foi em vão e, pelo contrário, apresenta um permanente interesse.

80. *Grundgesetze*, II, pp. 253-265. Este axioma enuncia duas coisas: de um lado, que a generalidade de uma igualdade de valores é interpretada como uma igualdade entre percursos de valores; e, de outro, que esta própria igualdade é interpretada como a generalidade de uma igualdade. É este último aspecto que induz ao paradoxo.

Sabe-se, no entanto, que todos os seus esforços[81] para reduzir a aritmética à lógica foram infrutíferos[82].

Frege não procurou, mediante subterfúgios ou polêmicas, defender as posições previamente assumidas. Com toda lisura publicou a dificuldade descoberta por Russell. Este, aliás, falando a respeito desta questão, muitos anos depois, assim se expressa. 'Quando penso em atos de grandeza e de integridade, apercebo-me que nada conheço de comparável à dedicação de Frege à verdade. Encontrava-se ele a um passo de completar a obra de sua vida, a maioria de seus trabalhos fora ignorada em proveito de homens infinitamente menos competentes, seu segundo volume estava prestes a aparecer e, ao ter conhecimento de que seu pressuposto fundamental era errôneo, reagiu com prazer intelectual, reprimindo todo sentimento de decepção pessoal. Era algo quase que sobre-humano, e um indicador daquilo de que os homens são capazes quando se dedicam ao trabalho criador e ao conhecimento, ao invés do rude afã de dominarem e tornarem-se famosos'[83].

Após a publicação do segundo volume das *Leis Fundamentais*, Frege não mais se ocupará de grandes trabalhos acerca de lógica e fundamentação da matemática. Por outro lado, a intensa correspondência[84] que nesta época mantém com Couturat, Hilbert, Darmstaedter, Dingler, Husserl, Jourdain, Peano, Löwenheim, Russell, Wittgenstein e Vailati demonstra que a importân-

81. Anos depois, o célebre lógico polonês S. Lesniewski (1927, 1934) provou que mesmo este novo axioma leva à contradição. Seguindo proximamente Lesniewski apareceram, mais tarde, as análises de Sobociński (1949, 1950), Quine (1955) e Geach (1956). Para uma discussão ampla, cf. R. Sternfeld, *Frege's Logical Theory*, Southern Ill., 1966, cap. 7; e também o *Appendix*. Duas foram as soluções apresentadas para eliminar do sistema das *Leis Fundamentais* o paradoxo de Russell. De início, o próprio Russell, em 1908, propôs uma solução conhecida como teoria ramificada dos tipos lógicos que pode ser descrita, resumidamente, como uma aplicação da teoria fregeana dos níveis funcionais à teoria dos conjuntos. Nesse mesmo ano, E. Zermelo procurou resolver o impasse pela elaboração de uma axiomática para a teoria dos conjuntos que fosse suficientemente atenuada a ponto de evitar este paradoxo e, por outro lado, suficientemente forte para servir de base à construção da matemática. Ao que se saiba, nenhuma dessas soluções despertou em Frege qualquer interesse. É dado porém conjecturar que em ambas as propostas ele percebera dificuldades quase tão sérias quanto o próprio paradoxo que elas visavam sanar. Cf. G. Currie, *Frege. An Introduction to his Philosophy*, Nova Jersey, 1982, pp. 135-137.

82. Além do paradoxo de Russell que incide sobre a Lei Fundamental V, o programa logicista de Frege se depara ainda com um outro obstáculo. Gödel, ao mostrar em 1931 que uma axiomática completa e consistente para a aritmética é impossível, inviabilizou a tentativa de justificar a aritmética por meio axiomático. Aliás, o teorema da incompletude de Gödel diz respeito não só à axiomatização da aritmética como também à da própria lógica, desde que esta seja uma lógica de ordem superior envolvendo a teoria dos conjuntos.

83. Em carta a Heijenoort, cf. J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, Harvard, 1967, p. 127.

84. Para a correspondência científica de Frege, cf. G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, 1976.

cia de seu pensamento não passou despercebida para os matemáticos e filósofos de seu tempo. Em 1904, publica o artigo 'Que é uma Função?'[85], em homenagem a Ludwig Boltzmann pelo seu sexagésimo aniversário de nascimento. Publicou, ainda nesse período, três trabalhos sobre os fundamentos da geometria[86] – 'Sobre os Fundamentos da Geometria', 'Sobre os Fundamentos da Geometria, II' e 'Sobre os Fundamentos da Geometria, I, II, III' –, em conseqüência da correspondência que mantivera com D. Hilbert antes da descoberta do paradoxo de Russell[87]. E ainda três outros estudos em que, respondendo às objeções de J. Thomae, ataca a concepção formalista de aritmética[88].

Em 1918, Frege se impôs a tarefa de escrever um amplo tratado de lógica filosófica, o que aliás nunca veio a se consumar. Disto resultaram as chamadas *Investigações Lógicas*[89] – a saber, 'O Pensamento'[90], 'A Negação'[91], 'Pensamentos Compostos'[92] e ainda, ao que parece, 'Generalidade Lógica'[93] – em que tende para uma perspectiva menos formalista e mais especulativa, reflexiva e exploratória. Nelas, Frege analisa as relações entre pensamento e inferência ou, segundo outra maneira de ver, as relações entre lógica e psicologia filosófica. Esses trabalhos representam um dos momentos mais altos de seu pensamento, e é de se lastimar que não tenham merecido a atenção devida. Eles, em conjunto, abrem uma dupla vertente nas especulações fregeanas. De um lado, constituem um novo modo de abordar o cálculo sentencial, procurando definir os conectivos lógicos por meios operatórios, em vez da definição axiomática. Por outro lado, abrem novos roteiros em lógica filosófica através das discussões que desenvolvem em torno das noções de verdade, negação, sentença, pensamento, asserção etc.

85. G. Frege, 'Was ist eine Funktion?', *Festschrift L. Boltzmann. Gewidmet zum sechzigsten Geburtstage 20. Februar 1904*, Leipzig, J. A. Barth, 1904, pp. 656-666. Republicado em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 273-280, e traduzido e publicado no presente volume, cap. 11.
86. Tais trabalhos foram republicados em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 262-272; 281-323.
87. Para a correspondência entre Frege e Hilbert, G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, pp. 58-80.
88. Cf. G. Frege, 'Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 15 (1906), pp. 586-590; 'Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen', *JDMV*, 17 (1808), pp. 52-55; 'Schlußbemerkung', *JDMV*, 17 (1908), p. 56. Republicados em G. Frege, *Kleine Schriften*, pp. 324-333.
89. Cf. G. Frege, *Investigações Lógicas*, tradução P. Alcoforado, Porto Alegre, EDIPUCRS, 2002.
90. G. Frege, 'Der Gedanke: Eine Logische Untersuchung', *Beitäge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1 (1918-1919), pp. 58-77.
91. G. Frege, 'Die Verneinung: Eine Logische Untersuchung', *idem*, 1 (1918-1919), pp. 143-157.
92. G. Frege, 'Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge', *idem*, 3 (1923-1926), pp. 36-51.
93. Este trabalho, escrito provavelmente entre 1923 e 1925, Frege deixou incompleto, e só postumamente foi publicado, sob o título de 'Logische Allgemeinheit', em G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, pp. 278-281.

Além das *Investigações Lógicas*, ele ainda escreveu inúmeros outros trabalhos, como o revelou a edição de seus *Escritos Póstumos*[94]. Estes mostram que Frege, no final de sua vida, em 1923, veio a rejeitar não só a teoria dos conjuntos como o próprio logicismo e, além disso, viu na separação radical entre geometria e aritmética um equívoco. 'Mais eu reflito, mais convencido me torno de que aritmética e geometria se desenvolveram a partir do mesmo fundamento (*demselben Grunde erwachsen sind*), na verdade do geométrico, e assim sendo toda a matemática é finalmente geometria'[95]. Deste modo, a geometria seria a como matemática fundamental, da qual é possível derivar tanto a aritmética quanto a análise. Pois o conhecimento matemático se deriva, tal como ele agora o concebe, da intuição sintética *a priori*, e assim não mais cabe procurar na lógica o fundamento para a aritmética. Com isto, abandona, em definitivo, a tese de que a aritmética é analítica e fundada na lógica[96]. Por tal razão, Frege se volta para a geometria no sentido de fundamentar a aritmética. É difícil saber o que efetivamente o levou a assumir essa nova atitude em face da aritmética ou do conhecimento matemático de modo geral. Pode-se, porém, conjeturar que Frege foi levado a assumir tal posição por não ver outra alternativa, após a descoberta do paradoxo de Russell, senão a de apelar para o conhecimento sintético *a priori*. Todas as verdades matemáticas seriam assim sintéticas *a priori*. Em decorrência disso, ele é levado a mostrar que os números não mais devem ser definidos logicamente, mas geometricamente. Em grandes linhas, sua concepção seria basicamente a seguinte: os números são objetos abstratos que se identificam com pontos de uma superfície gaussiana[97]. A razão de ser desta afirmação se encontra no fato de Frege entender que a estratégia tradicional de definir de início os números naturais e a seguir todas as demais espécies numéricas levando em conta sua crescente complexidade até chegar aos complexos é algo que também deve ser abandonado. 'Por discordar do procedimento usual, não começarei pelos inteiros positivos para a seguir estender progressivamente o domínio daquilo que chamo de número. Pois é um equívoco lógico a palavra número não ter um significado (*Bedeutung*) determinado, mas sempre se ter de entender por ela algo

94. G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, 1969.
95. G. Frege, 'Zahlen und Arithmetik' (1924-1925), publicado nos *Nachgelassene Schriften*, p. 297.
96. Ver as considerações de Frege em carta a K. Zsigmondy, cf. G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, pp. 269-271.
97. Como se sabe, em 1831 o célebre matemático alemão C. F. Gauss (1777-1855) elaborou, pela primeira vez, uma representação geométrica para os números complexos $a + bi$, não como vetores, mas como pontos no plano complexo, e ainda descreveu a adição e a multiplicação em termos geométricos.

de novo'[98]. Para contornar tal dificuldade, Frege entende que cumpre partir do conjunto mais abrangente e dele retirar progressivamente os demais subconjuntos em ordem decrescente. Seguindo tal diretriz, ele fixa como ponto de partida os números complexos e destes retira os reais, dos quais obtém os inteiros, para finalmente chegar aos números naturais. Assim, ele tenta encontrar na geometria os instrumentos adequados para mais uma vez repensar os fundamentos da aritmética.

Frege infelizmente não chegou a viver o necessário para desenvolver essas idéias, e contemplar as repercussões e conseqüências de sua obra. No entanto, ele tinha plena consciência do valor de suas contribuições[99]. Em 1918, abandona sua residência em Jena e se retira para Badkleinen. Com a idade de 77 anos, em 26 de julho de 1925, vem a falecer.

Paulo Alcoforado

98. G. Frege, 'Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik' (1924-1925), publicado nos *Nachgelassene Schriften*, p. 299.
99. Assim, em carta datada de 12 de janeiro de 1925 a seu filho Alfred, diz: 'Não desprezes meus manuscritos. Embora nem tudo seja valioso, neles há contudo coisas valiosas. Creio que um dia chegará em que certas coisas serão mais valorizadas do que hoje. Cuide que nada se extravie'. G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, p. xxxiv.

ADVERTÊNCIA PARA A PRIMEIRA EDIÇÃO

Já há algum tempo pensávamos em traduzir para o português alguns dos principais textos lógicos e filosóficos de Frege. Contudo, isso só se tornou possível graças ao apoio dispensado pela professora Celina Junqueira – chefe do Departamento de Filosofia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro –, por ter-me concedido um semestre sabático durante o qual pude elaborar grande parte deste trabalho. Agradeço ainda ao prof. Guido de Almeida pelas sugestões quanto à tradução de algumas passagens; meus agradecimentos estendem-se também aos professores L. A. Cerqueira Batista e Ivo Korytowski pelo incansável auxílio nas revisões sucessivas às quais foram submetidos os textos que ora publicamos, bem como a José Paulo Paes e funcionários do Departamento Editorial da editora Cultrix, pela atenção que dispensaram à presente obra.

Rio de Janeiro, maio de 1975

ADVERTÊNCIA PARA A SEGUNDA EDIÇÃO

Ao preparar esta segunda edição, 25 anos após a primeira, quatro itens foram por nós levados em conta. De início, se impunha submeter a *Introdução* a uma profunda e extensa revisão pela qual informações novas fossem acrescentadas, equívocos fossem corrigidos e obscuridades fossem sanadas. Em segundo lugar, no que diz respeito à tradução dos textos fregeanos, foi imperioso rever e expurgar todos os erros e senões de que tivemos conhecimento. Em terceiro lugar, o presente livro sai enriquecido pelo acréscimo de cinco outros trabalhos de Frege. E enfim, a introdução de um índice, e a ampliação e atualização da bibliografia também nos pareceu algo que não poderia deixar de ocorrer. Com tudo isto, esperamos que a nova edição de *Lógica e Filosofia da Linguagem* seja em tudo superior à primeira. Para terminar, apraz-me agradecer aos prof. Ivo Korytowiski, Maria Lúcia Barbosa e Walter Gomide por suas observações, contribuições e sugestões, todas de inestimável valor, bem como à direção e aos funcionários da Edusp, pela atenção e o esmero com que levaram a termo a editoração da presente obra. Gostaria ainda de manifestar meu apreço de maneira toda especial ao prof. José Jeremias de Oliveira Filho (USP) pelo incentivo e estímulo generosamente dispensados.

Niterói, julho de 2006

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. OBRA DE FREGE

Os livros, artigos e opúsculos tanto publicados como inéditos de Frege encontram-se nas seguintes publicações, que tomadas em conjunto encerram toda sua produção literária:

1. FREGE, G. *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1964.
2. _____ , *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Hildesheim, G. Olms, 1961.
3. _____ , *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Bd. I-II, Hildesheim, G. Olms, 1966.
4. _____ , *Kleine Schriften*, ed. I. Angelelli, G. Olms, Hildesheim, 1967.
5. _____ , *Nachgelassene Schriften*, ed. H. Hermes, F. Kambartel e F. Kaulbach, Hamburg, F. Meiner, 1969.
6. _____ , *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, ed. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, Ch. Thiel e A. Veraart, Hamburg, F. Meiner, 1976.

B. OBRAS SOBRE FREGE

A lista que se segue encerra os mais importantes livros até então escritos sobre Frege:

1. ANGELELLI, I. *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy.* D. Reidel, 1967.
2. BAKER, G. P. & HACKER, P. M. S. *Frege: Logical Excavations.* Oxford U. P., 1984.
3. BIRJUKOV, B. *Two Soviet Studies on Frege.* Trad. I. Angelelli. Oxford, 1964.
4. BELL, D. *Frege's Theory of Judgement.* Oxford, Clarendon, 1972.
5. CARL, W. *Frege's Theory of Sense and Reference.* Cambridge, 1994.
6. CURRIE, G. *Frege. An Introduction to his Philosophy.* Nova Jersey, Barnes & Noble, 1982.
7. DEMOPOULOS, W (ed.), *Frege's Philosophy of Mathematics.* Harvard, 1995.
8. DUMMET, M. *Frege: Philosophy of Language.* Londres, Duckworth, 2 ed., 1992.
9. DUMMET, M. *Frege: Philosophy of Mathematics.* Londres, Duckworth, 1995.
10. GROSSMANN, R. *Reflections on Frege's Philosophy*, Northwestern, 1969.
11. HAAPARANTA, L. 'Frege's Doctrine of Being'. *Acta Philosophica Fennica*, 39, 1985.
12. RESNIK, M. *Frege and the Philosophy of Mathematics.* Ithaca, Cornell U. P., 1980.
13. SLUGA, H. *Gottlob Frege.* Londres, Routledge, 1980.
14. STERNFELD, R. *Frege's Logical Theory.* Illinois, 1966.
15. THIEL, C. *Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges.* Neisenheim, Hain, 1967.
16. WALKER, J. *A Study of Frege.* Oxford, Blackwell, 1965.

1

CONCEITOGRAFIA, "PREFÁCIO" (1879)

A apreensão de uma verdade científica passa, normalmente, por vários estágios de certeza. Com efeito, conjeturada inicialmente a partir de um número talvez insuficiente de casos particulares, uma proposição[1] geral torna-se mais e mais solidamente estabelecida ao se relacionar com outras verdades mediante cadeias de inferências – seja porque dela se derivam conclusões que são confirmadas por outros modos, seja, pelo contrário, por ela se afigurar uma conclusão de proposições já estabelecidas. Daí poder-se perguntar, de um lado, como podemos chegar gradualmente a uma certa proposição e, de outro, como podemos assegurar-lhe finalmente uma sólida fundamentação[2]. A primeira questão talvez seja respondida diferentemente por diferentes pessoas; a segunda, sendo mais determinada, tem sua resposta vinculada à estrutura interna da proposição considerada.

Publicado pela primeira vez sob o título de 'Vorwort' em G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [*Conceitografia, uma Linguagem Formular do Pensamento Puro Modelada sobre a da Aritmética*], Halle, L. Nebert, 1879. Republicada em G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1964, pp. ix- xiv.

1. Já que Frege toma, em seus primeiros escritos, a palavra Satz na acepção de sentença assertiva associada a um significado (ou pensamento), entendemos que, nesse contexto inicial, cumpre traduzi-la por 'proposição' e não por 'sentença' (mera seqüência de símbolos ou palavras de determinada linguagem capaz de expressar um pensamento) como o faremos mais adiante, sempre que for o caso (N. do T.).
2. Frege distingue, em uma proposição, sua gênese (ou descoberta, ou invenção) de sua prova (ou demonstração, ou justificação). Esses dois tópicos cobrem, a seu ver, o que há de mais importante no que diz respeito a uma proposição (N. do T.).

O método de prova (*Beweisführung*) mais seguro consiste, obviamente, em seguir estritamente a lógica, que, abstraindo as características particulares das coisas, apóia-se exclusivamente nas leis sobre as quais se baseia todo o conhecimento. Por esta razão, dividimos todas as verdades que requerem prova em duas espécies: aquelas cuja prova pode ser conduzida por meios puramente lógicos e aquelas cuja prova se apóia em fatos empíricos[3]. Mas o fato de uma proposição ser da primeira espécie é plenamente compatível com o fato de ela jamais se tornar consciente em um espírito humano, caso não houvesse atividade sensorial[4]. Portanto, o que está na base desta divisão [das espécies de verdade] é não a gênese psicológica (*Entstehungsgeweise*), mas o melhor método de prova (*Beweisführung*)[5].

Entretanto, quando indago a qual destas duas espécies [de verdade] pertencem os juízos aritméticos, devo de início investigar até que ponto se procede em aritmética[6] apenas por inferências [formais], pelo uso tão somente das leis do pensamento que transcendem a todas as particularidades[7]. A via que segui, no que tange a essa indagação, foi a seguinte: tentei reduzir o conceito de sucessão em uma seqüência (*Anordnung in eine Reihe*) à noção da conseqüência *lógica* (*logische Folge*), para daí poder estabelecer o conceito de número. Para evitar que nessa tentativa se intrometesse inadvertidamente algo de intuitivo, cabia tudo reduzir a uma cadeia inferencial (*Schlusskette*) carente de qualquer lacuna. Mas ao tentar realizar essa exigência da forma a mais rigo-

3. Quanto à prova ou demonstração de uma proposição geral, Frege distingue entre provas lógicas e provas empíricas, e assim dois são os métodos possíveis de serem seguidos. Um seria aquele que consiste em estabelecer demonstrações factuais e empíricas, enquanto o outro seria aquele que procede de modo 'puramente lógico', sem qualquer referência à observação ou experimento. Nesse sentido, Frege sustenta que todas as provas em aritmética devem ser puramente lógicas, assim rejeitando a concepção de J. S. Mill que sustenta que os conceitos e princípios da aritmética teriam um fundamento exclusivamente na experiência empírica ou sensorial. Cf. *System of Logic*, III, 24. (Para uma crítica ao empirismo, *Fundamentos da Aritmética*, §§7-9, pp. 24-25, onde ele explica a razão desta posição.) Mas para que seja possível elaborar provas puramente lógicas no âmbito das leis da aritmética é necessário que os conceitos primitivos da aritmética sejam definidos em termos estritamente lógicos. E tais definições não podem se restringir apenas à noção de número, pois tudo aquilo que envolver a noção de ordem (como: '=', '>', '<'), indispensável para a construção da axiomática, terá que ser definido, para evitar lacunas e intuições, em termos do que Frege denomina de 'pertinência a uma seqüência *f*'. Cf. *Conceitografia*, Parte III (N. do T.).
4. Posto que sem percepção sensorial é impossível qualquer desenvolvimento mental nos seres que conhecemos, segue-se que o que acabamos de dizer é válido para todos os juízos.
5. O fato de os componentes de uma proposição terem uma origem sensorial ou empírica não impede que sua demonstração possa ser estritamente lógica (N. do T.).
6. Sobre o uso freqüente da palavra 'aritmética', cf. supra p. 12, nota 8 (N. do T.).
7. Ainda que não se possa dizer que se trata de uma definição em sentido próprio, a lógica é exatamente o estudo das 'leis do pensamento que transcendem a todas as particularidades' (N. do T.).

rosa possível, deparei-me com o obstáculo da insuficiência da linguagem [corrente]: além de todas as dificuldades inerentes ao manuseio das expressões, à medida que as relações se tornavam mais complexas, tanto menos apto me encontrava para atingir a exatidão exigida. Tal dificuldade levou-me a conceber a presente conceitografia.

De imediato, esta deve servir para examinar, de modo o mais rigoroso, a exatidão de uma cadeia inferencial e ainda denunciar todo o pressuposto que inadvertidamente possa nela se imiscuir, de modo que este venha a ser, já em sua origem, investigado[8]. Eis por que renunciei a expressar tudo aquilo que fosse irrelevante para a *seqüência inferencial* (*Schlussfolge*). No §3 [da presente obra], chamei de *conteúdo conceitual* (*begrifflichen Inhalt*) aquilo que encerra o que julgo ser relevante [para o processo inferencial]. Essa explicação deve estar, portanto, sempre[9] presente, caso se deseje entender corretamente a essência de minha linguagem formular (*Formelsprache*). Disto também se deriva o nome *Begriffsschrift*, 'conceitografia'. Já que me limitei, aqui, a expressar relações que independem das propriedades particulares das coisas, poderia também empregar a expressão 'linguagem formular do pensamento puro'. Contudo, quanto à [expressão] 'decalcada sobre a linguagem formular da aritmética', que utilizei no título [deste livro], vincula-se antes às idéias fundamentais do que as minúcias de execução [da conceitografia]. Todo esforço de instituir uma semelhança artificial [com a aritmética] pela caracterização do conceito como a soma de suas notas[10] esteve inteiramente fora de meus pro-

8. Frege afirma que na elaboração da aritmética nada de intuitivo deve imiscuir-se no contexto de uma prova. Mas, para que ese princípio seja observado fielmente, importa suprimir toda lacuna (*Lücke*) na cadeia dedutiva de um teorema. Para evitar lacunas e intuições no desenvolvimento de uma prova, Frege exige que todo conceito e todo princípio sejam explicitamente enunciados e, assim, que nada fique tácito ou implícito. Exige outrossim que toda inferência seja realizada de acordo com uma regra de dedução claramente estabelecida, que vincule a proposição derivada seja à(s) premissa(s) já esta estabelecida(s), seja a outra sentença previamente derivada. Cf. Frege, 'Justificação' *infra* p. 59ss (N. do T.)

9. O presente "Prefácio" se utiliza de três termos para designar seu sistema (ou de outrem): *Begriffsschrift*, 'conceitografia', *Formelsprache*, 'linguagem formular' e *Bezeichnungsweise*, 'modo de designação' (N. do T.).

10. No contexto da lógica e da filosofia do conceito, o termo *Merkmal* é tradicionalmente traduzido pelo substantivo 'nota'. Em sentido amplo, nota é tudo aquilo pelo qual uma coisa pode ser determinada, conhecida ou distinguida de outra(s) coisa(s). Em decorrência disso, nota seria a qualidade essencial de algo, ou então as qualidades estritamente acidentais (ditas 'notas individuais', ou 'notas individuantes') de algo. Cf. J. Grooten & G. Steenbergen, *New Encyclopedia of Philosophy*, Nova York, Philosophical Library, *s. v.* 'note'. Em sentido lógico, notas de um conceito são os componentes desse conceito (isto é, as determinações pelas quais um conceito se distingue do outro), e ainda as propriedades dos objetos que caem sob esse conceito. Assim, o conceito de número inteiro negativo tem como notas número inteiro e negativo; tais notas são também as propriedades de cada um dos inteiros menores que zero (N. do T).

pósitos. O ponto de contato mais próximo entre minha linguagem formular e a [linguagem formular] da aritmética está no modo de utilizar as letras.

Creio que a melhor maneira de elucidar a relação que se dá entre minha conceitografia e a linguagem corrente seria compará-la com a relação que ocorre entre o microscópio e o olho. Este último, pela extensão de sua aplicabilidade e pela versatilidade de sua adaptação às mais diversas circunstâncias, é em muito superior ao microscópio. Contudo, como um instrumento óptico, o olho possui, por certo, muitos inconvenientes, que passam comumente desapercebidos por força de seu estreito relacionamento com a nossa vida mental. De fato, se um objetivo científico exigir grande acuidade de resolução, o olho se mostra insuficiente. Por outro lado, o microscópio se afigura perfeitamente adequado para tais fins, embora seja por isso mesmo inadequado para outros.

De modo similar, minha conceitografia foi concebida como um instrumento para servir a determinados fins científicos, e não deve ser descartada pelo fato de não servir para outras finalidades. Se de algum modo ela servir a tais objetivos, torna-se irrelevante o fato de inexistir novas verdades em meu trabalho. Ficaria consolado com a convicção de que um desenvolvimento do método também faz progredir a ciência. Assim, Bacon pensava ser melhor inventar um meio pelo qual se pudesse descobrir facilmente algo a descobrir algo de particular; e, com efeito, todos os grandes progressos científicos modernos tiveram sua origem num aperfeiçoamento do método.

Leibniz também reconheceu – e talvez mesmo superestimou – as vantagens de um modo de designação (*Bezeichnungsweise*) adequado. Sua idéia de uma característica universal, de um *calculus philosophicus* ou *ratiocinator*[11], era tão ambiciosa que a tentativa de realizá-la não poderia ultrapassar os meros preliminares[12]. O entusiasmo de que foi possuído seu idealizador – ao perceber o enorme incremento que traria, ao poder intelectual da humanidade, um modo de designação adequado às próprias coisas (*die Sachen selbst*) – levou-o a subestimar os empecilhos inerentes a esse empreendimento. Mas, mesmo que um objetivo tão grandioso não possa ser alcançado num único intento, não se deve excluir a possibilidade de uma aproximação lenta

11. Sobre isto, veja-se A. Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie*, vol. 3 [Berlin, 1867, pp. 1-47].

12. Trendelenburg assinala que o projeto leibniziano de uma linguagem universal remontaria a Lúlio, Kircher, Becher, Delgarno e Wilkins. Ele também nos lembra das considerações de Descartes de que 'a invenção de tal linguagem depende de uma filosofia verdadeira'. Mas no entender de Trendelenburg nenhum desses projetos chegou a um termo satisfatório por carecer de uma adequada teoria do conceito. Cf. A. Trendelenburg, *Hist. Beitr. zur Phil.*, p. 3ss (N. do T.).

e gradual. Quando um problema parece insolúvel em toda a sua generalidade, deve-se provisoriamente restringi-lo; pois talvez possa ser resolvido por ampliações graduais. Podemos pensar os símbolos da aritmética, da geometria, da química como realizações, para domínios particulares, do projeto de Leibniz. A conceitografia aqui proposta é um outro acréscimo a esses domínios; mas, por certo, um domínio situado em uma posição central e limítrofe a todos eles. A partir daqui, portanto, abrem-se as mais amplas perspectivas de sucesso no sentido de preencher as lacunas das linguagens formulares existentes, no sentido de associar sob uma única linguagem formular domínios até então separados, e ainda no sentido de ampliá-la a ponto de incluir áreas que até então tinham escapado a essa linguagem[13].

Creio sobretudo que minha conceitografia seja ampliada com sucesso onde tiver especial importância a exatidão de uma prova, como nos fundamentos do cálculo diferencial e do cálculo integral.

Parece-me, aliás, mais fácil estender o domínio de minha linguagem formular à geometria. Para tanto, basta acrescentar [à linguagem formular] mais alguns símbolos para as relações intuitivas que aí [na geometria] ocorrem. Deste modo, obter-se-ia uma espécie de *analysis situs*[14].

Daqui, pode-se efetuar a transição para a teoria do movimento puro[15], e depois para a mecânica e para a física. Nestes últimos domínios – em que além da necessidade racional (*Denknotwendigkeit*) se impõe a necessidade natural (*Naturnotwendigkeit*) –, é de se prever um maior desenvolvimento do modo de designação à medida que o conhecimento progrida. Isto, porém, não é uma razão para esperar até que pareça excluída a possibilidade de tais transformações.

13. Aqui nos é dito que sua conceitografia não só é capaz de vir a abranger domínios distintos e separados do conhecimento, como também está aberta para acréscimos e ampliações no sentido de torná-la apta para assimilar outros domínios sempre que as noções de dedução e prova estiverem em questão (N. do T.).

14. Diversas linhas de investigação foram conduzidas sob a rubrica de *analysis situs*, termo criado por Leibniz. Ao que parece, foi Leibniz (1679) o primeiro, e depois L. Euler (1735), com o problema das sete pontes sobre o rio Pregel, os que deram início a esse ramo da matemática. Mas na verdade, devemos a A. F. Möbius, um aluno de Gauss, as primeiras investigações "topológicas" realmente efetivas. Sabemos que Möbius (1840) e, de modo mais aprofundado, F. Guthrie e A. De Morgan, levaram adiante a questão que se tornou conhecida sob o nome de o problema do mapa. Este problema, ainda hoje não resolvido, consiste em mostrar que se pode colorir qualquer mapa plano de um número finito de países com apenas quatro cores, de tal modo que não existam dois países que tenham uma fronteira em comum pintados com a mesma cor. Mais tarde, em 1858, ele descobriu a superfície conhecida pelo nome de 'banda de Möbius'. É de se cogitar que Frege, ao aproximar a noção de *analysis situs* de sua conceitografia, teria talvez em mente a questão de 'associar sob uma única linguagem formular domínios até então separados, e ainda no sentido de ampliá-la a ponto de incluir áreas que até então tinham escapado a essa linguagem', como lemos acima (N. do T.).

15. Frege aqui se refere à cinemática pura (N. do T.).

Se uma das tarefas da filosofia for romper o domínio da palavra sobre o espírito humano, desvendando os enganos que surgem, quase que inevitavelmente, em decorrência de utilizar a linguagem corrente para expressar as relações entre os conceitos, ao liberar o pensamento dos acréscimos indesejáveis a ele associados pela natureza dos meios lingüísticos de expressão, então minha conceitografia, desenvolvida sobretudo para esses propósitos, poderá ser um valioso instrumento para os filósofos. Por certo, ela também não reproduz as idéias de forma pura, já que isto não é possível quando as idéias são representadas por um meio [de expressão] exterior [à inteligência]. O que é possível, por um lado, é confinar tais discrepâncias [conceitográficas] ao inevitável e ao inofensivo e, por outro, por estas diferirem daquelas [discrepâncias] que são próprias da linguagem corrente, elas nos protegem da influência unilateral de um meio particular de expressão.

Parece-me que a mera descoberta desta conceitografia foi um fator de progresso para a lógica[16]. Espero que os lógicos, caso não se deixem intimidar por uma impressão inicial de estranheza, não neguem seu assentimento às inovações a que fui levado a realizar por uma necessidade inerente à própria questão. Os desvios da tradição se justificam pelo fato de a lógica ter seguido, até aqui, muito proximamente a linguagem e a gramática. Em particular, creio que a substituição dos conceitos de *sujeito* e *predicado* pelos de *argumento* e *função* resistirão ao tempo. É fácil perceber como o fato de considerar um conteúdo como função de um argumento leva à formação de conceitos[17]. Mais ainda, a análise de como se correlacionam entre si os significados das palavras: *se*, *e*, *não*, *ou*, *existe*, *alguns*, *todos* etc., mereceu toda a atenção.

Em particular, diremos ainda o seguinte. Aqui, nos restringimos a um único modo de inferência[18], como exposto no §6; isto se justifica pelo fato de entendermos que, ao se lançar a *fundação* desta conceitografia, os componentes últimos devem ser tão simples quanto possível, se a clareza e a ordem

16. Nessa passagem, a oposição 'conceitografia'/'lógica' sugere que a palavra 'lógica' significa "lógica tradicional de origem aristotélica", ou ainda "álgebra de Boole-Schröder" (N. do T.).

17. Na *Conceitografia*, o termo 'conceito' (*Begriff*) é empregado no sentido corrente de "noção" ou "idéia geral". Mas nessa passagem nos é dito que a apreensão de 'um conteúdo como uma função de um argumento leva à formação de conceitos'. Tal afirmação, porém, não passa de um mero prenúncio, pois só mais tarde, em 'Função e Conceito' (1891), o termo 'conceito' virá a assumir o sentido técnico de "função de um único argumento cujo valor é sempre um valor de verdade, e cujo percurso de valor é a extensão desse conceito" (N. do T.).

18. Trata-se da conhecida regra de dedução *modus ponens*, que Frege denomina de 'regra de separação' (N. do T.).

devem prevalecer. Isto não exclui que, *posteriormente*, certas transições de vários juízos para um novo juízo – transições que por esse único modo de inferência só são possíveis de maneira indireta – sejam transformadas em transições diretas pela utilização de abreviações. Com efeito, é isto mesmo que se recomenda em uma aplicação posterior. E pela utilização desse processo serão introduzidos novos modos de inferência.

Já observei que as fórmulas (31) e (41) podem ser reduzidas a uma única fórmula

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\left(\top\!\!\top a \equiv a\right)$$

com a qual são possíveis outras simplificações[19].

Como disse no início, a aritmética foi o ponto de partida do processo intelectual que me conduziu à minha conceitografia. A esta ciência, portanto, pensei aplicá-la de início, procurando analisar mais detidamente seus conceitos e fundamentar de modo mais aprofundado suas proposições. Por ora, no terceiro capítulo [da *Conceitografia*], desenvolvo algo que aponta para essa direção. O prosseguimento da rota indicada – a elucidação dos conceitos de número, grandeza etc. – será objeto de outras investigações que virão a lume logo após este livro[20].

Jena, 18 de dezembro de 1878.

19. Sejam as tautologias '$\sim\sim\alpha \rightarrow \alpha$' (31) e '$\alpha \rightarrow \sim\sim\alpha$' (41). Tanto de uma quanto de outra, pode-se deduzir, pelo princípio *duplex negatio affirmat* (*Conceit.*, §18), a fórmula '$\alpha \rightarrow \alpha$'. Esta última fórmula, por ser uma tautologia, se equivale à '$\alpha \leftrightarrow \alpha$', já que todas as tautologias se equivalem, cf. *Conceit.*, §8. Por outro lado, Frege admite que se combine a fórmula (31) com a (41) a fim de dar origem à dupla negação da identidade '$a \equiv a$', com o fito de simplificar certas inferências (*Conceit.*, p. VIII). Mas esta fórmula não é apresentada como um axioma, mas como um teorema de seu sistema (N. do T.).

20. Frege acena para um conjunto de artigos, alguns aqui traduzidos, mas sobretudo para seu livro *Fundamentos da Aritmética* (1884), que veio à luz cinco anos depois do aparecimento da *Conceitografia* (1879) N. do T.

2

APLICAÇÕES DA CONCEITOGRAFIA (1879)

No que se segue, daremos alguns exemplos de como, mediante minha conceitografia, relações aritméticas e geométricas podem ser expressas[1].

Deve-se pôr em evidência de início que os sinais [conceitográficos] aqui utilizados não foram especialmente inventados para cada caso especial, mas têm significados tão gerais que os tornam capazes de representar relações as mais diferentes[2].

Publicado pela primeira vez sob o título de 'Anwendungen der Begriffsschrift' em *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 13 (1879) pp. 29-33. E republicado em G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1964, pp. 89-93.

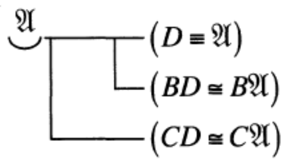
1. Em um artigo inédito, Frege nos diz que 'toda linguagem razoavelmente desenvolvida' deve consistir de 'duas partes': uma 'parte formal que na linguagem correta compreende as terminações, prefixos, sufixos e palavras formais' e de uma 'parte propriamente conteudística'. Logo a seguir, ele ainda nos diz que a aritmética (e podemos acrescentar todos os demais cálculos da matemática) só encerra a parte contudítica carecendo por completo 'do cimento lógico que permitirá manter firmemente juntos, uns aos outros, esses blocos de construção'. (Frege, *Nachgelassene*, p. 14). No presente artigo, Frege ilustra esse seu pensamento com exemplos tomados tanto da aritimética como da geometria (N. do T.).
2. Neste parágrafo, Frege faz duas afirmações a propósito de sua conceitografia: uma negativa e outra positiva. Na primeira, ele diz que não construiu um cálculo destinado a resolver casos particulares e específicos desse cálculo. Na segunda, é afirmado que seu sistema formal é tão amplo e abrangente que as relações aritméticas e geométricas podem ser nele obtidas como casos particulares. Tal abrangência é inerente aos sinais, fórmulas e regras da conceitografia, vale dizer, da lógica. Embora Frege aqui não o diga, é seu pensamento que nenhum desses dois quesitos poderiam ser atribuídos à álgebra de Boole, e sistemas congêneres (N. do T.).

A expressão

$$AB \cong CD$$

significa a congruência[3] dos dois pares de pontos AB e CD[4].

Assim sendo, podemos expressar a circunstância de que o ponto D está na linha reta determinada pelos pontos B e C pela seguinte expressão[5]:



A explicação do conteúdo desta fórmula seria: Da congruência dos pares de pontos BD e B e da congruência dos pares de pontos C e C pode, qualquer que seja, ser inferido que é o mesmo ponto que D. Ou ainda: Não se pode em absoluto encontrar um ponto distinto de D que, com B e C, forme pares de pontos que seja respectivamente congruentes a BD e CD.

Isto é sempre o caso quando, e somente quando, D está na linha reta determinada por B e C.

De modo análogo, pode-se expressar [por meio da conceitografia] que todo ponto está num plano determinado por três pontos. Por

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f\left(x_{\gamma}, y_{\beta}\right)$$

entendo[6] que y pertence à seqüência f iniciada por x. Segundo a concepção a mais geral de função, que tomo aqui como base, pode-se considerar

3. Cabe não confundir o sinal '≅' que no atual contexto é utilizado para denotar congruência com o sinal '≡' (*Inhaltsgleichheit*) que expressa identidade de conteúdo (N. do T.).
4. Nesse momento, Frege enuncia sua definição conceitográfica de congruência entre dois segmentos (N. do T.).
5. Aqui vemos a aplicação do conceito de congruência no sentido de definir a noção de ponto médio de um segmento (N. do T.).
6. Cumpre não confundir a expressão acima em destaque com a expressão

$$\frac{\gamma}{\beta} f\left(x_{\gamma}, y_{\beta}\right),$$

modo abreviado de notar o fato de que y segue x na seqüência f. A primeira fórmula diz respeito à pertinência enquanto que a segunda diz respeito à sucessão (N. do T.).

$$u + 1 = v$$

como uma função de u e v e, portanto, como um caso particular de $f(u, v)$. Consoante isto[7],

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}}\left(0_{\gamma} + 1 = a_{\beta}\right)$$

significa que a pertence à seqüência que se inicia com 0 e surge a partir de uma constante acrescida de 1, ou seja

$$0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

donde ser a um número inteiro positivo. E

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}}\left(0_{\gamma} + 1 = a_{\beta}\right)$$

é a expressão da circunstância de que a é um número inteiro positivo. Do mesmo modo[8],

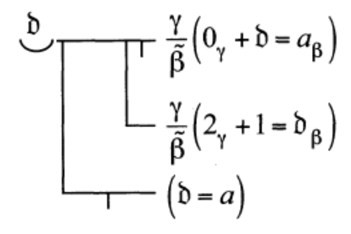
$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}}\left(0_{\gamma} + d = a_{\gamma}\right).$$

significa que a pertence à seqüência

$$0, d, 2d, 3d \ldots$$

sendo assim um múltiplo de d. A expressão[9]

7. Aqui é definida a progressão aritmética, como uma seqüência cuja razão é igual a 1 (N. do T.).
8. Temos agora a definição de progressão aritmética, como uma seqüência de razão qualquer (N. do T.).
9. Frege oferece aqui e a seguir duas definições para número primo. Eis a primeira solução (N. do T.).



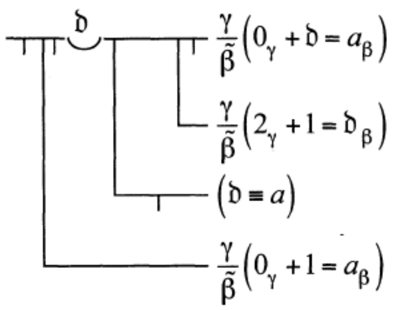
diz que a não é divisível por nenhum dos números 2, 3, 4 ... a não ser por ele próprio. Se acrescentarmos ainda[10] que a é um número inteiro positivo, então obtemos em

2, 3, 4 ...

a designação da circunstância de que a é um *número primo.*

Pode-se agora mostrar como a conceitografia nos exibe o teorema da teoria dos números, segundo o qual todo número inteiro positivo pode ser representado pela soma de quatro quadrados[11].

A equação



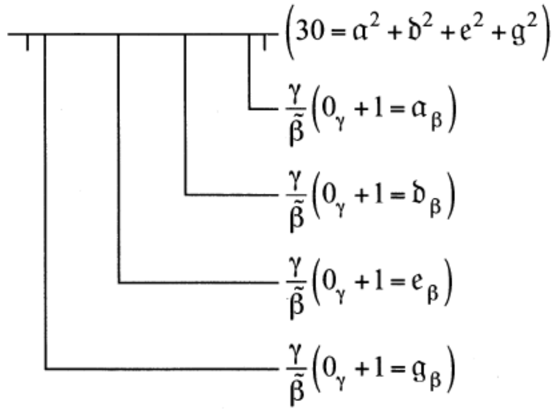
não expressa

10. Frege oferece agora a segunda definição, alternativa, para número primo (N. do T.).
11. Por fim, em sua última aplicação, Frege mostra como é possível por meio de sua conceitografia expressar logicamente um famoso teorema da aritmética: todo inteiro positivo pode ser decomposto em uma soma de quatro quadrados (N. do T.).

$$30 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{e}^2 + \mathfrak{g}^2$$

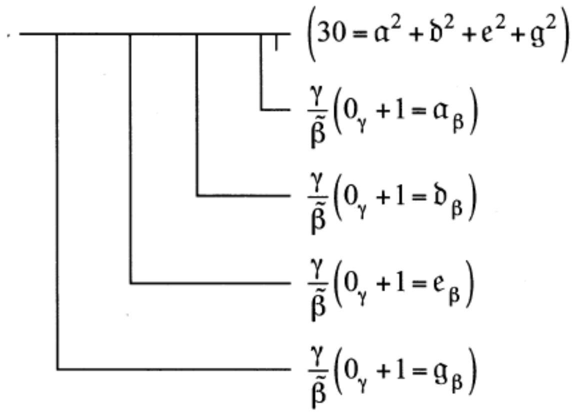
1) que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ tenham que ser números inteiros.
2) que tais números existam.

Em

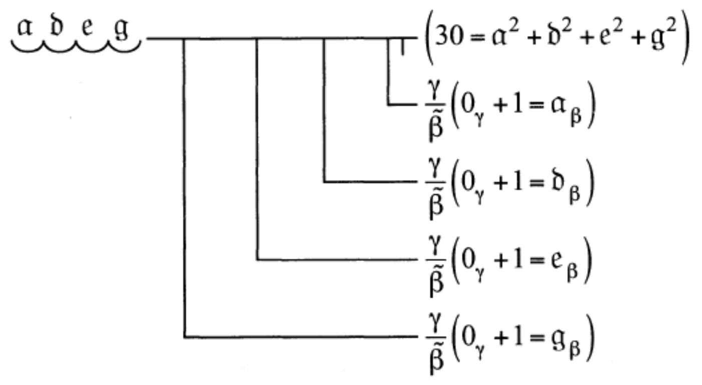


é encontrada a primeira dificuldade, pois esta expressão designa a circunstância de que 30 é a soma dos quadrados de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, e que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ são números inteiros positivos.

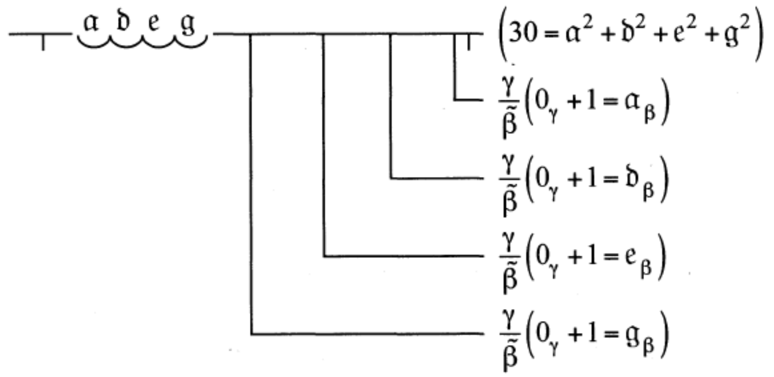
Precisa ainda ser estabelecido que tais números inteiros existam. Se retirarmos o traço de negação que afeta o todo [da fórmula acima], obtemos em



a negação da circunstância de que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ sejam números inteiros que tenham 30 como a soma de seus quadrados; isto é, de que pelo menos um dos $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ não é um número inteiro, ou que a soma de seus quadrados não é 30. Se introduzimos diante do todo os sinais de generalização[12] para $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$:



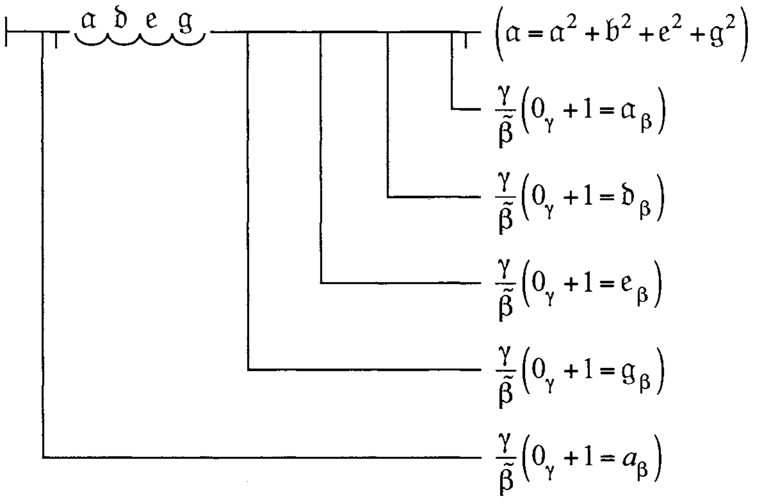
então, por este meio, o sentido da fórmula será generalizado. Esta designa agora a circunstância de que, quaisquer que sejam $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, caso estes sejam números inteiros positivos, a soma de seus quadrados não pode ser 30; em outros termos, de que não se podem exibir quatro números inteiros positivos cuja soma de seus quadrados seja 30. Isto é, no entanto, exatamente o contrário do que desejávamos estabelecer. Mas, se colocarmos o traço de negação diante de toda a fórmula, então alcançamos nosso objetivo. A fórmula



12. Em sua *Conceitografia*, §11 ele denomina o sinal que denota a generalidade de *Höhlung*, 'cavidade' ou 'concavidade', em que letras góticas (minúsculas ou maiúsculas) são introduzidas. Aqui porém ele

designa a circunstância de que o número 30 é representável pela soma de quatro quadrados. A possibilidade, que reside no sufixo "ável" da palavra "representável", passa a ser assim expressa por duas negações, que não se anulam reciprocamente, posto que uma não se segue imediatamente à outra. A primeira negação é generalizada, e, mediante isto, a generalidade da negação é obtida, isto é, a impossibilidade. A negação da impossibilidade dá, portanto, a possibilidade[13].

Agora, se quisermos expressar a sentença de que todo número inteiro positivo é representável pela soma de 4 quadrados, então 30 deve ser substituído por um sinal geral, por exemplo, *a*; com a condição suplementar de que *a* seja um número inteiro positivo:



O traço de juízo[14] diante do todo apresenta esta sentença como uma asserção.

se utiliza da palavra descritiva *Allgemeinheitszeichen*, 'sinal de generalização', que em linguagem atual da lógica seria expresso pela locução 'quantificador universal' (N. do T.).

13. Frege enuncia uma conhecida relação da lógica modal: se uma proposição não é impossível, dizemos que é possível (N. do T.).

14. Sobre o traço de juízo, que mais tarde ele virá chamar de 'vertical', cf. nota 52, p. 101 (N. do T.).

3

SOBRE A JUSTIFICAÇÃO CIENTÍFICA DE UMA CONCEITOGRAFIA (1882)

Nas partes mais abstratas da ciência, torna-se cada vez mais inequívoca a falta de um meio que permita, ao mesmo tempo, evitar incompreensões quanto ao pensamento (*Denken*) de outrem, e também equívocos sobre o nosso próprio pensamento. Tanto um como o outro têm sua causa na imperfeição da linguagem, já que temos que usar sinais sensíveis para pensar. Nossa atenção é naturalmente voltada para o exterior. As impressões sensíveis de tal modo sobrepujam em vivacidade as imagens da memória (*Erinnerungsbilder*), que por si só – ou quase que por si só – as imagens sensíveis determinam o curso de nossas idéias (*Vorstellungen*)[1], tal como se dá com os animais. E dificilmente poderíamos escapar desta dependência [das impressões sensíveis] se o mundo exterior não fosse, de algum modo, também dependente de nós.

À maior parte dos animais é dado influir, por sua capacidade de se locomoverem, sobre suas impressões sensoriais: podem fugir de umas e ir em busca de outras. Mas isto não é tudo: eles podem até mesmo agir sobre as próprias coisas, alterando sua forma. Essa capacidade também possui o homem

Publicado pela primeira vez sob o título de 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift', *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, NF 81(1882) pp. 48-56. Republicado em G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1964, pp. 106-114.

1. A palavra *Vorstellung*, 'idéia', não tem aqui, como os contextos indicam, o sentido especializado que lhe dará Frege em seu livro de 1884, *Fundamentos da Aritmética*, § 27, nota (N. do T.).

em proporção ainda maior. Ela porém não basta para dar total liberdade ao curso de nossas idéias. Pois este ainda estaria restrito ao que a mão seria capaz de plasmar, ou ao que a voz pudesse alcançar, se não fosse a invenção dos sinais que tornam presente aquilo que está ausente, invisível ou mesmo inacessível aos sentidos (*unsinnlich*).

Não nego que, mesmo sem o auxílio de sinais, a percepção de uma coisa possa reunir em torno de si um feixe de imagens da memória. Mas não poderíamos nelas nos fixar, pois cada nova percepção precipitaria essas imagens (*Bilder*)[2] na obscuridade e faria emergir outras. Porém, se produzimos um sinal para uma idéia que uma percepção trouxe à mente, criamos com isto um novo núcleo estável em torno do qual se reúnem outras idéias. Entre estas, podemos novamente escolher uma outra [idéia], para ela criar seu sinal. Assim, passo a passo penetramos no mundo interior de nossas idéias e nele nos movemos livremente, usando os próprios dados sensíveis para nos liberar de suas imposições. Os sinais têm para o pensamento a mesma importância que para a navegação teve a descoberta de como usar o vento para navegar contra o vento. Desse modo, que ninguém menospreze os sinais! Muita coisa depende de sua escolha adequada. E seu valor não decresce pelo fato de que, após um longo uso [de um sinal], não mais seja necessário produzir efetivamente o sinal [exterior] ou não mais tenhamos que proferi-lo em voz alta, para pensar. Pois pensamos com palavras, e quando não o fazemos com palavras, o fazemos com sinais matemáticos ou de outro tipo.

Sem os sinais dificilmente nos elevaríamos ao pensamento conceitual. Ao dar o mesmo sinal a diferentes coisas, embora similares, já não mais designamos uma coisa individual, mas aquilo que elas têm em comum: o conceito (*Begriff*). E o conceito nós o obtemos quando o designamos; posto que não é perceptível (*unanschaulich*), ele tem necessidade de um representante perceptível (*anschaulichen Vertreters*) que o faça manifesto para nós. Desse modo, o sensível nos abre o mundo do não-sensível.

O que dissemos ainda não exaure os méritos dos sinais, embora possa ser suficiente para manifestar o fato de que sejam indispensáveis. Mas a linguagem se mostra incapaz de prevenir os erros de pensamento. Não cumpre sequer a primeira exigência que a esse respeito se impõe, isto é, a de ser unívoca. Os casos mais perigosos são aqueles em que os significados das palavras

2. Mais tarde, Frege virá a propor essa palavra para designar aqueles sinais dotados de sentido mas carentes de referência, como 'círculo quadrado'. Evidentemente, este não é o sentido em que ela está sendo aqui empregada (N. do T.).

só ligeiramente diferem entre si, variações sutis mas nem por isso irrelevantes. Dentre os inúmeros exemplos, aqui só mencionaremos um caso muito freqüente: a mesma palavra pode designar tanto um conceito como um objeto individual que cai sob este conceito. De modo geral, nenhuma distinção marcante é feita entre o conceito e o indivíduo. "O cavalo" pode designar um ente individual; como pode também designar a espécie[3], como na sentença: "O cavalo é um animal herbívoro". Mas "cavalo"[4] também pode designar um conceito, como na sentença: "Isto é um cavalo".

A linguagem não é regida por leis lógicas, de maneira que a mera observância da gramática seja suficiente para garantir a correção formal do curso do pensamento. As formas pelas quais se expressam as inferências são tão variadas, tão amplas e tão vagas que pressupostos podem facilmente se imiscuírem, e não serem arrolados quando forem enumeradas as condições necessárias para a validade da conclusão. A conclusão ganha assim uma generalidade maior do que aquela que justificadamente merece.

Mesmo um autor tão consciencioso e rigoroso como Euclides faz com freqüência uso, de modo tácito, de pressupostos que não são enumerados nem nos axiomas [e postulados] nem nas premissas dos teoremas particulares. Assim, na demonstração do teorema 19 do livro primeiro dos *Elementos* ('Em todo triângulo o lado maior opõe-se ao ângulo maior'), ele se utilizou de forma tácita das seguintes proposições:

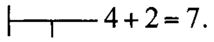
1. Se um segmento não é maior que outro, então ele é igual ou menor que este outro.
2. Se um ângulo é igual a outro, então não é maior que este outro.
3. Se um ângulo é menor que outro, então ele não é maior que este outro.

Só com redobrada atenção pode o leitor perceber a ausência dessas proposições, especialmente porque, por seu aspecto fundamental, elas de tal modo se assemelham às leis do pensamento que acabam por serem utilizadas como estas.

Na linguagem [corrente] não se encontra um grupo bem delimitado de formas de inferência, de modo que, tendo por base a forma lingüística, não se pode distinguir [em uma cadeia inferencial] uma seqüência sem lacunas de uma que

3. Mais tarde, Frege irá distinguir com toda nitidez a função do artigo definido 'o' e do demonstrativo 'este', como formadores de nomes individuais, da função do artigo indefinido 'um', como formador de nomes conceituais (N. do T.).
4. Sem aspas no original (N. do T.).

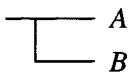
No entanto, com isto ainda não se asseriu que essa equação[23] é falsa. Formou-se apenas um novo conteúdo asserível que, só após o acréscimo do traço de juízo, torna-se o juízo "4 + 2 não é igual a 7":



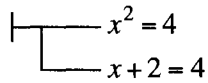
Quando se quer relacionar dois conteúdos asseríveis[24], *A* e *B*, devem-se considerar os seguintes casos:

1) *A* e *B*.
2) *A* e não *B*.
3) não *A* e *B*.
4) não *A* e não *B*

Entendo por



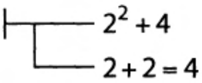
a negação do terceiro caso[25]. Esta convenção pode parecer muito artificial. À primeira vista, não é claro por que escolho justamente o terceiro caso e expresso sua negação mediante um sinal especial. A razão tornar-se-á imediatamente evidente através de um exemplo. A expressão



nega o caso em que x^2 não é igual a 4, quando $x + 2 = 4$. Isto pode ser traduzido assim: se $x + 2 = 4$, então $x^2 = 4$. Tal tradução exibe a importância da

23. Cf. cap. 5, nota 6, (N. do T.).
24. Aqui, Frege mostra como obter as proposições complexas a partir dessas quatro combinações de conjunções e negações. Este é o processo de que ele se utiliza na *Conceitografia*, § 5 (N. do T.).
25. O terceiro caso é '(não *A* e *B*)', sua negação será 'não(não *A* e *B*)', que equivale a '(*A* ou não *B*)', que também equivale a 'Se *A*, então *B*' (N. do T.).

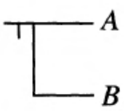
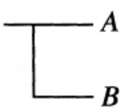
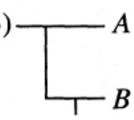
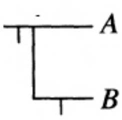
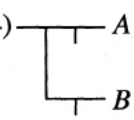
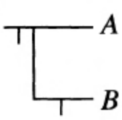
relação encerrada em nosso sinal. Pois o juízo hipotético[26] é a forma comum a todas as leis da natureza e a forma de todas as relações causais em geral. A linguagem corrente não permite que se traduza esse sinal em todos os casos por "se". Ela só o admite naquele caso em que uma parte do conteúdo, como o x aqui, é indeterminada e confere ao todo uma generalidade[27]. Se substituirmos x por 2, já não será adequado traduzir



por

"se $2 + 2 = 4$, então $2^2 = 4$".

Consideremos agora as combinações do traço de implicação com os traços de negação na seguinte tabela:

1)		O caso "não *A* e *B*" é negado	5)		O caso "não *A* e *B*" é afirmado: *B* e não *A*.
2)		O caso "*A* e *B*" é negado: *A* e *B* excluem-se mutuamente.	6)		O caso "*A* e *B*" é afirmado: *A* e *B*.
3)		O caso "não *A* e não *B*" é negado: *A* ou *B*.	7)		O caso "não *A* e não *B*" é afirmado: nem *A* nem *B*.
4)		O caso "*A* e não *B*" é negado.	8)		O caso "*A* e não *B*" é afirmado: A e não B.

26. Por 'juízo hipotético' (*hypothetische Urteil*) cumpre entender o que mais tarde Russell veio a denominar de 'implicação material' (N. do T.).

27. Essa 'parte indeterminada', como está escrito, Frege virá mais tarde chamar de 'indicador indefinido'. Cf. cap. 5, n. 10 (N. do T.).

omite passos intermediários. Pode-se mesmo dizer que o primeiro caso quase nunca ocorre na linguagem, já que repugna à sensibilidade desta a prolixidade que decorre do fato de nada querer omitir. Na linguagem, as relações lógicas são quase sempre apenas sugeridas, insinuadas, e não propriamente expressas.

A única vantagem da palavra escrita sobre a palavra falada é sua permanência. [Na palavra escrita], pode-se apreender com o olhar repetidas vezes uma seqüência de pensamentos sem o temor de que se modifique, e assim podemos examinar mais detidamente sua exatidão. Neste [procedimento de exame], as leis da lógica são aplicadas exteriormente, como um fio de prumo, já que nenhuma garantia existe na natureza mesma da linguagem por palavras (*Wortschrift*). Mesmo assim, enganos facilmente escapam aos olhos do examinador, especialmente aqueles que decorrem de ligeiras diferenças de sentido de uma palavra. Se apesar disto, tanto na vida prática como na ciência, ainda nos orientamos razoavelmente bem, devemos aos diversos meios de verificação que em geral se encontram à nossa disposição. A experiência, a intuição espacial nos defendem de inúmeros erros. Ao invés disso, as regras lógicas [por permanecerem exterior ao conteúdo] pouca proteção nos oferecem, como indicam os exemplos de certas áreas do conhecimento em que os meios de verificação começam a rarear. Essas regras não conseguiram preservar do erro alguns grandes filósofos; e pouco puderam fazer para defender do erro a matemática superior, já que [tais regras] sempre permaneceram alheias ao conteúdo.

As deficiências que assinalamos têm sua causa em uma certa maleabilidade e instabilidade da linguagem corrente, que são aliás a condição de sua capacidade de evoluir e de seus inúmeros recursos. Sob esse aspecto, a linguagem pode ser comparada à mão, que não obstante a adaptabilidade às mais diferentes tarefas é, ainda assim, insuficiente. Produzimos mãos artificiais, instrumentos elaborados para fins específicos e que operam com uma precisão que a mão não lograria. Como é possível tal precisão? Graças à rigidez, a inflexibilidade dos componentes, cuja ausência torna a mão tão versátil. De modo similar, a linguagem por palavras tem as mesmas limitações: necessitamos de um sistema de sinais (*Ganzes von Zeichen*), carente de toda ambigüidade, e cuja forma rigorosamente lógica não deixe escapar o conteúdo.

Pode-se agora indagar se a superioridade incide sobre os sinais sonoros ou sobre os sinais visuais[5]. Os primeiros têm a vantagem de poderem ser pro-

5. Frege distingue os sinais em sonoros e visuais, fato pouco relevante para o lógico. Os primeiros estão mais próximos da vida emocional e dos processos mentais; os últimos, por força de sua estabilidade e nitidez, são mais adequados para representar os processos inferenciais (N. do T.).

duzidos independentemente das circunstâncias exteriores. Além disso, também cabe ter presente a estreita afinidade entre os sons e os processos mentais (*innere Vorgängen*). Até a forma sob a qual ambos se apresentam, a seqüência temporal, é a mesma; ambos são igualmente fugazes. Os sons, em particular, têm para com a vida emotiva uma relação mais estreita que as figuras e as cores; e a voz humana, com suas infinitas modulações, também se adapta às mais delicadas combinações e variações dos sentimentos. Mas, por valiosas que possam ser essas vantagens para outras finalidades, elas são irrelevantes para o rigor das cadeias dedutivas (*Schlussfolgerungen*). A grande adaptabilidade dos sinais sonoros às condições psíquicas e corporais da razão tem, talvez, a desvantagem de tornar a razão mais dependente daquelas.

Com os sinais visíveis, especialmente as figuras, tudo é bem diverso. De modo geral, eles são delimitados com nitidez e diferenciados com clareza. Esta nitidez dos sinais escritos tem por conseqüência tornar o que é designado mais nitidamente delimitado. Tal efeito sobre nossas idéias é o que importa alcançar, para se obter o rigor do raciocínio. Mas este só será alcançado caso o sinal designar diretamente a coisa.

Outra vantagem do sinal escrito é sua maior permanência e invariância. Neste sentido, ele é semelhante ao conceito, como este deve ser, e assim distinto do incessante fluxo de nossos processos reais de pensamento (*wirkliche Gedankenbewegung*). A escrita oferece a possibilidade de manter muitas coisas presentes ao mesmo tempo; e mesmo que em dado momento só possamos olhar para uma pequena parte de tudo isso, mesmo assim retemos uma impressão geral que está à nossa disposição, sempre que se faça necessário.

As relações espaciais dos sinais escritos em uma superfície escrita bidimensional podem servir para expressar, de modo mais explícito, relações internas que o permitem o mero suceder e preceder no tempo unidimensional; e isto facilita também a apreensão daquilo a que queremos fixar a atenção[6]. Com efeito, a simples disposição em uma seqüência linear de forma alguma corresponde à multiplicidade das relações lógicas pelas quais se combinam entre si os pensamentos.

As próprias propriedades que fazem com que os sinais escritos se afastem tanto do curso de nossas idéias são também as mais adequadas para remediar alguns defeitos de nossa constituição. Portanto, quando não mais se trata

6. Frege se manifesta sobre a superioridade da dupla dimensão sobre a escritura linear para a expressão da multiplicidade das relações lógicas (N. do T.).

de expor o pensamento natural, tal como ele se organiza em sua ação recíproca com a linguagem falada, mas de superar as limitações que resultam de seu estreito relacionamento com o sentido da audição, então o sinal escrito é preferível ao sinal sonoro. Uma escrita, para explorar as vantagens peculiares dos sinais visíveis, deve ser totalmente distinta de toda linguagem falada. Não é necessário dizer que essas vantagens têm pouca valia no âmbito da escrita de uma linguagem falada. A posição relativa das palavras que se encontram sobre a superfície escrita depende em grande parte do comprimento das linhas escritas e, por tal razão, carece de relevância.

Existem, porém, outros tipos de escritas que melhor aproveitam as vantagens acima enumeradas. A linguagem por fórmulas da aritmética é uma conceitografia, já que expressa diretamente as coisas (*Sache*) sem a intermediação dos sons. Sendo assim, ela alcança a concisão que torna possível acomodar, em uma única linha, todo o conteúdo de um juízo simples. Tais conteúdos – no presente caso, igualdades ou desigualdades – são escritos uns sob os outros, na medida em que um se segue do outro. Se de dois [juízos] segue-se um terceiro, separa-se o terceiro dos dois primeiros por um traço horizontal, que pode ser lido "portanto". Deste modo, a bidimencionalidade da superfície escrita é utilizada em proveito da clareza. Aqui, a dedução segue um desenvolvimento acentuadamente uniformizado, tendo quase sempre como fundamento o princípio de que transformações idênticas operadas sobre números idênticos conduzem a idênticos resultados. Por certo, esta não é a única maneira de realizar inferências em aritmética; mas, onde o processo lógico é diferente, torna-se em geral necessário expressá-lo por palavras. Mas, a linguagem por fórmulas da aritmética carece de expressões para [expressar] as conexões lógicas[7] e, por tal razão, ela não merece, em acepção estrita, o nome de conceitografia.

Exatamente o contrário se dá com o sistema oriundo de Leibniz[8] para as relações lógicas, que Boole[9], R. Grassmann[10], Stanley Jevons[11], E. Schröder[12] e outros renovaram recentemente. Sem dúvida que aí encontramos as formas lógicas, embora não em sua totalidade; mas falta o conteúdo. [Nestes sistemas]

7. Por 'conexões lógicas' (*logische Verknüpfungen*) Frege entende as constantes lógicas dos cálculos proposicional e dos predicados (N. do T.).

8. *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, ed. Erdmann, p. 94 [*Philos. Schrif.*, VII, pp. 228-235 ed. Gerhardt (N. do T.)].

9 G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, 1847 (N. do T.).

10 R. Grasmann, 'Die Begriffslehre oder Logik', *Die Formenlehre oder Mathematik*, vol. II, 1872 (N. do T.).

11 W. Stanley Jevons, *Pure Logic*, 1864 (N. do T.).

12 E. Schröder, *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, 1877 (N. do T.).

toda tentativa de substituir as letras isoladas por expressões de conteúdos, tais como equações analíticas, acabará por evidenciar – por força da obscuridade, do peso e da ambigüidade das fórmulas assim obtidas – como este tipo de notação é pouco adequado para a construção de uma autêntica conceitografia[13].

Deve-se exigir o seguinte de uma conceitografia. Ela deve dispor de expressões simples para as relações lógicas, e tais expressões, limitadas em número ao necessário, devem ser manipuladas de maneira fácil e segura. Essas formas devem ser adequadas para se combinar, do modo o mais estreito, com um conteúdo. Além disso, deve procurar uma concisão tal que a dupla dimensão da superfície escrita possa ser utilizada para propiciar a maior clareza de exposição. Os sinais que expressam conteúdo não têm a mesma importância. Eles podem ser facilmente criados segundo as necessidades, desde que se disponham das formas gerais. Quando não se consegue, ou quando não se afigura necessário, analisar um conceito em seus componentes últimos, podemos nos contentar com sinais provisórios.

Facilmente surgem preocupações desnecessárias sobre a exeqüibilidade de um tal empreendimento. É impossível, poderia ser dito, que através de uma conceitografia se possa fazer progredir a ciência, pois a invenção da primeira já pressupõe a realização desta última. Com a linguagem corrente também se dá a mesma dificuldade aparente. Com efeito, supõe-se que ela tenha tornado possível o desenvolvimento da razão; mas como poderia o homem ter criado a linguagem sem a razão? Para descobrir as leis da natureza há que se utilizar instrumentos físicos; mas estes só podem ser produzidos mediante uma tecnologia avançada que, por sua vez, se apóia sobre o conhecimento das leis da natureza. Em todos esses casos o círculo se resolve da mesma maneira: um progresso em física resulta num progresso em tecnologia, e esta torna possível a construção de novos instrumentos mediante os quais a física por sua vez progride. A aplicação [do que acabamos de dizer] ao nosso caso é evidente.

Tentei complementar[14] a linguagem por fórmulas da matemática com sinais para as relações lógicas, a fim de criar uma conceitografia destinada, de início, apenas para a matemática, como era de se desejar. Isto não exclui, porém, a possibilidade de aplicação de meu simbolismo a outros domínios. As relações lógicas ocorrem em toda parte, e os sinais para conteúdos especiais

13. Frege quer com isto dizer que tais sistemas, por não encerrarem nem um cálculo proposicional e nem um cálculo dos predicados – e assim, por não serem uma autêntica conceitografia – não podem representar de maneira adequada a aritmética (N. do T.).

14. *Conceitografia*, Halle a. S., 1879.

podem ser escolhidos de modo a se encaixem no âmbito da conceitografia. Seja como for, persiste o fato de que uma representação intuitiva das formas do pensamento tem um significado que ultrapassa o âmbito da matemática. Sendo assim, que os filósofos concedam a este assunto alguma atenção.

4

SOBRE A FINALIDADE DA CONCEITOGRAFIA (1882-1883)

Já tive a honra de aqui fazer uma conferência[1] sobre minha conceitografia. O que me leva a retomar essa questão é ter notado que sua finalidade foi, com freqüência, mal compreendida. Tal é o que depreendo das várias resenhas que, desde então, surgiram acerca de meu livro[2]. Em conseqüência disto, tinham que surgir juízos distorcidos. Objetam-se, entre outras coisas, que não levei em consideração as contribuições de Boole[3]. Tal objeção foi também feita por E. Schröder em sua resenha [publicada] no volume XXV da *Revista de Matemática e Física*[4]. Comparando minha conceitografia com a linguagem formular de Boole, ele chega à conclusão de que esta última é preferível sob todos os aspectos. Embora tal juízo me cause pouca satisfação, sou-lhe grato pela resenha detalhada e pelos fundamentos objetivos de suas objeções, pois me dão a oportunidade de, mediante sua refutação, melhor esclarecer esta questão.

Publicado pela primeira vez sob o título 'Über den Zweck der Begriffsschrift', *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft,* 16 (1883) Supplement, pp. 1-10. E republicado na *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1964, pp. 97-106.

1. Trata-se da conferência proferida em 24 de janeiro de 1879 e mais tarde publicada sob o título 'Aplicações da Conceitografia' (N. do T.).
2. Frege se refere a seu livro *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, L. Nebert, 1879. Sobre as resenhas feitas a este livro, cf. supra p. 17 (N. do T.).
3. George Boole (1815-1864), lógico e matemático inglês. Suas obras mais conhecidas são *Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *An Investigation of the Laws of Thought* (1854). N. do T.
4. Mais precisamente, E. Schröder, resenha da *Begriffsschrift* de Frege, publicada na *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25 (1880) pp. 81-94 (N. do T.).

Com relação à objeção acima levantada, devo observar, antes de mais nada, que a linguagem formular de Boole, decorridos mais de vinte anos de sua invenção, de forma alguma alcançou um êxito tão contundente que o fato de abandonar seus fundamentos deva parecer insensato, e que só um aprofundamento de seu desenvolvimento possa ser de interesse. Além disso, as questões tratadas por Boole parecem, em grande parte, ter sido primeiramente criadas para serem resolvidas mediante suas fórmulas[5].

Mas a objeção a mim dirigida não leva sobretudo em conta o fato de que meu objetivo era diferente do de Boole. Não era meu desejo apresentar uma lógica abstrata através de fórmulas, mas expressar um conteúdo mediante sinais escritos de maneira mais clara e precisa do que seria possível por palavras. Com efeito, desejava produzir não um mero *calculus ratiocinator*, mas uma *lingua characterica*[6] em sentido leibniziano; mas, para tal realização, reconheço que um cálculo dedutivo é uma parte necessária de uma conceitografia. Se isto foi mal compreendido, talvez se deva ao fato de eu ter permitido que, no desenvolvimento de meu projeto, o aparato lógico abstrato ocupasse demasiadamente o primeiro plano[7].

A fim de demonstrar pormenorizadamente as diferenças entre a linguagem formular de Boole e a minha, farei de início uma curta apresentação da primeira. Não se trata de entrar em todos os pormenores das variantes encontradas nos antecessores e sucessores de Boole, uma vez que estas são irrisórias em face à profunda diferença entre a minha conceitografia [e a linguagem formular de Boole].

5. Com essa observação, Frege quer dizer que o cálculo de Boole, em lugar de encontrar aplicações na aritmética ou na análise matemática, confina-se em si mesmo. É o que parece sugerir as seguintes palavras de C. S. Peirce: '*The algebra of logic should be self-developed, and arithmetic should spring out of logic instead of reverting to it*'. *Collected Papers*, vol. 3, p. 217 (N. do T.).

6. Cf. p. 16, nota 22 (N. do T.).

7. Em diversos lugares, Frege observa que o objetivo de seu cálculo é significativamente distinto do cálculo de Boole. Este teria por finalidade, segundo Frege, desenvolver uma lógica abstrata, um *calculus ratiocinator* que se confinaria a seu próprio desenvolvimento, à expansão de suas próprias formas lógicas e sem nenhuma aplicabilidade ao âmbito da matemática. Na verdade, trata-se de um cálculo matemático particular, de uma outra teoria matemática, de outro ramo da matemática, cuja preocupação é desenvolver dedutivamente novas equações algébricas. Por outro lado, Frege se diz interessado na construção de uma linguagem, uma *lingua characterica* voltada para a representação de conteúdos e assim apta para expressar a aritmética. Ele se preocupa portanto em traduzir e representar pensamentos; sob este ponto de vista seu sistema é concebido, não como um cálculo matemático, mas como um meio de fundamentar a matemática. Por tal razão, Frege não concede à álgebra booleana o qualificativo de lógica. Isto só se aplica a seu simbolismo (N. do T.).

Boole distingue *proposições primárias* de *proposições secundárias*[8]. As primeiras comparam as extensões dos conceitos (*vergleichen Begriffe ihrem Umfange nach*), enquanto que as últimas expressam relações entre conteúdos asseríveis (*beurtheilbaren Inhalten*)[9]. Essa classificação é insuficiente, uma vez que nela os juízos existenciais não têm lugar. De início, consideremos as *proposições primárias*. As letras significam aqui extensões de conceitos. Aos indivíduos enquanto tal não se assinala nenhum sinal, e isto é uma falha considerável da linguagem formular de Boole. Pois, mesmo quando um conceito só subsume um único indivíduo, ainda assim sempre permanece uma profunda diferença entre ele e esse indivíduo. As letras são associadas entre si pela multiplicação e adição lógicas. Se A significa a extensão do conceito "triângulo" e B significa a extensão do conceito "eqüilátero", então o produto lógico

$$A \cdot B$$

designa a extensão do conceito "triângulo eqüilátero". Pela soma lógica

$$A + B$$

deve-se compreender a extensão do conceito "triângulo ou eqüilátero"[10]. As expressões "produto" e "soma" justificam-se pela existência das seguintes equações:

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

8. Em seu livro *Mathematical Analysis of Logic*, ele distingue as proposições em categóricas e hipotéticas. Mas, em *An Investigation*, as proposições são divididas em 'primárias' (que expressam relações entre conceitos) e 'secundárias' (que expressam relações entre proposições). Ver G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, Dover, cap. IV, pp. 52-65. Para um estudo mais pormenorizado das proposições secundárias, ver cap. XI, pp. 159-176 e ainda cap. XII, pp. 177-184 (N. do T.).
9. Cf. p. 117, nota 22 (N. do T.).
10. Boole supõe que os conceitos A e B se excluam mutuamente, o que não é feito, entre outros, por Schröder.

Mas estes pontos de concordância com a multiplicação e adição algébricas dão também lugar a sensíveis divergências. Embora logicamente seja válido[11]

$$A = A \cdot A = A \cdot A \cdot A$$
$$A = A + A = A + A + A$$

contudo nem sempre, em sua generalidade[12], isto é válido em álgebra[13]. As diferenças entre o cálculo lógico e o cálculo matemático são tão ricas em conseqüências que a resolução de equações lógicas, a principal preocupação de Boole, pouco tem em comum com a resolução de equações algébricas. A subordinação de um conceito a outro pode ser expressa [em seu formalismo] da seguinte maneira:

$$A = A \cdot B.$$

Se A, por exemplo, significa a extensão do conceito "mamífero" e B significa a extensão do conceito "respira", então essa equação diz: as extensões dos conceitos "mamífero" e "mamífero que respira" são iguais; isto é, todos os mamíferos respiram. O fato de um indivíduo cair sob um conceito, o que é inteiramente distinto da subordinação de um conceito a outro, não recebe de Boole uma notação particular; em sentido estrito, aliás, não recebe nenhuma. Até aqui, considerando-se apenas algumas divergências superficiais, tudo o que vimos já se encontra em Leibniz, de cujas obras, no que se refere a essa questão, Boole não tem conhecimento. Por "0" Boole designa a extensão de um conceito sob o qual nada cai; por "1" Boole designa a extensão de um conceito sob o qual tudo, de que se fala, cai (*universe of discourse*)[14]. Vê-se que o significado desses sinais, especialmente do 1, desvia-se de seu significado aritmético. Para esses mesmos conceitos, Leibniz emprega, respectivamente, "*non ens*" e "*ens*". Assim,

11. Tal é o que enuncia a idempotência da conjunção (ou seja, 'p & p ↔ p') e da disjunção (ou seja, 'p v p ↔ p'), dois conceitos lógicos (N. do T).
12. De fato, no que diz respeito à primeira igualdade, só o número 0, à exclusão dos demais inteiros, é igual a 0 + 0 ou a 0 + 0 + 0 etc. Por outro lado, na segunda igualdade, só o número 1 a satisfaz; e assim qualquer outro número não a verifica, como, digamos, 2 não é igual a 2 · 2 ou a 2 · 2 · 2 etc. (N. do T.).
13. Em álgebra essas duas igualdades são objeto de estudo da teoria dos grupos cíclicos (N. do T.).
14. No texto original, esses dois sinais ocorrem sem aspas (N. do T.).

$$A \cdot B = 0$$

diz que os dois conceitos se excluem mutuamente como ocorre com "raiz quadrada de 2" e "número inteiro". Esta equação vale sem que seja

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0.$$

Necessita-se ainda, além do zero, de um outro sinal de negação a fim de, por exemplo, converter o conceito de "homem" ao conceito de "não-homem". Aqui os autores divergem. Schröder, para este fim, acrescenta às letras o índice 1. Outros têm ainda um sinal para a negação da identidade. Não considero essa profusão de sinais de negação vantajoso para a lógica booleana.

Boole reduz as *proposições secundárias* – por exemplo, os juízos hipotéticos[15] e disjuntivos – às *proposições primárias* de modo muito artificial[16]. O juízo "se $x = 2$, então $x^2 = 4$", ele o entende assim: a classe dos instantes de tempo em que $x = 2$ está subordinada à classe dos instantes de tempo em que $x^2 = 4$. Assim, também aqui a questão se resume a comparar extensões de conceitos, só que esses conceitos são mais exatamente classes de instantes de tempo durante os quais uma sentença é verdadeira. Tal concepção tem a desvantagem de envolver o tempo onde ele deveria estar inteiramente excluído. MacColl[17] explica as expressões para as *proposições secundárias* independentemente das expressões para as *proposições primárias*. Desse modo, a intromissão do tempo é certamente evitada; mas, por outro lado, está rompida toda conexão entre essas partes em que a lógica, segundo Boole, se divide. Prossegue-se, então, com as *proposições primárias*, empregando-se as fórmulas no sentido estabelecido por Boole, ou com as *proposições secundárias*, usando-se as explicações de MacColl. Toda transição de uma espécie de juízo para a outra, que freqüentemente ocorre no pensamento real, está bloquea-

15. A locução 'juízo hipotético' tem sido usada ora significando "juízo complexo" (ou "composto") e ora "juízo condicional" (ou "implicação"). No presente contexto, trata-se do último caso (N. do T.).
16. Frege entende que não cabe reduzir o cálculo dos predicados ao cálculo proposicional. Em seu modo de ver, toda tentativa de redução do primeiro ao segundo se revela artificial. Cabe, pelo contrário, fundamentar, como se costuma dizer, o primeiro no segundo (N. do T.).
17. H. MacColl, *Mathematical Questions*, 28 (1877) pp. 20-23; *Proceedings of the London Mathematical Society*, 9 (1877-1878) pp. 9-20 e 177-186, e 10 (1878-1879) pp. 16-28; e ainda *Mind*, 5 (1880) pp. 45-60; *Philosophical Magazine*, 11 (1881) pp. 40-43 (N. do T.).

da; pois não se devem empregar os mesmos sinais com dupla significação no mesmo contexto.

Quando consideramos a linguagem formular de Boole como um todo, verificamos que ela se resume a vestir a lógica abstrata com uma roupagem de sinais algébricos. Ela não é adequada para veicular um conteúdo, e também não é esta a sua finalidade. Mas esta [o veicular um conteúdo] é exatamente a minha intenção. Quero fundir os poucos sinais que introduzi com os sinais disponíveis da matemática para formar uma única linguagem formular. Nela, os sinais existentes [da matemática] correspondem aproximadamente aos radicais das palavras da linguagem corrente, ao passo que os sinais por mim anexados são comparáveis aos sufixos e palavras formais (*Formwörtern*)[18] que relacionam logicamente os conteúdos encerrados nos radicais[19].

Para tal objetivo, não podia empregar a notação de Boole; pois é inviável ter na mesma fórmula, por exemplo, o sinal + ocorrendo em parte em sentido lógico, e em parte em sentido aritmético. A analogia entre os processos do cálculo lógico e aritmético, de grande valia para Boole, só pode trazer equívocos, caso sejam associados. A linguagem por sinais de Boole só é pensável quando inteiramente separada da aritmética.

Tive, portanto, de criar outros sinais para as relações lógicas. Schröder diz que minha conceitografia quase nada tem em comum com o cálculo de conceitos de Boole, mas sim com o cálculo booleano dos juízos. De fato, esta é uma das diferenças mais marcantes entre meu modo de entender e o de Boole e, posso ainda acrescentar, o aristotélico, isto é, o fato de meu ponto de partida não serem os conceitos, mas os juízos. Isto, porém, não quer dizer que eu não possa expressar a relação de subordinação entre conceitos[20].

18. Frege se utiliza do termo *Formwort*, 'palavra formal', para designar as palavras da linguagem corrente que, de um ponto de vista teórico, em nada contribuem ou que só contibuem quando ocorrem no contexto de uma sentença para o pensamento principal dessa sentança. Contudo, tais palavras fazem parte da linguagem corrente e levam com freqüência seu usuário a supor que sua existência é necessária e sua função é relevante. É fácil perceber que em uma conceitografia (*i. e.*, uma linguagem logicamente perfeita) tais palavras ou devem ser sumariamente descartadas ou então manipuladas com o devido refinamento (N. do T.).

19. Frege nos diz que cumpre completar sua conceitografia com os devidos sinais matemáticos para assim expressar conteúdos, e desse modo obter *eine inhaltliche Sprache*. Nesse sentido, a conceitografia contribui com os aspectos formais, os sincategoremas, necessários para que se dê o relacionamento lógico entre os sinais da matemática (N. do T.).

20. Pela locução 'expressar a relação de subordinação entre conceitos', Frege quer dizer que sua conceitografia é capaz de expressar juízos como 'Todos os *A* são *B*' etc., vale dizer, juízos em que se relacionam extensões de conceitos. Tal é o objeto de estudo do cálculo dos predicados, como hoje é dito (N. do T.).

Diante da expressão de um conteúdo asserível[21], como 2 + 3 = 5, coloco um traço horizontal, o traço de conteúdo (*Inhaltsstrich*), que se distingue do sinal de subtração por seu maior comprimento:

$$\text{———}\; 2+3=5.$$

Por meio deste traço quero dizer que o conteúdo que se lhe segue está unificado de tal modo que outros sinais podem a ele relacionar-se. Em

$$\text{———}\; 2+3=5$$

ainda não se formula um juízo. Pode-se, portanto, sem incorrer em falsidade, escrever também

$$\text{———}\; 4+2=7.$$

Se quero asserir um conteúdo como correto, coloco na extremidade esquerda do traço de conteúdo o traço de juízo (*Urteilsstrich*)

$$\vdash\!\text{——}\; 2+3=5.$$

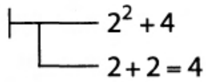
Como se é tão mal compreendido às vezes! Mediante essa notação, julguei ter estabelecido uma nítida diferença entre o ato de julgar e a formação de um conteúdo asserível, e Rabus[22] me acusa de misturar os dois!

A fim de expressar a negação de um conteúdo [asserível], acrescento ao traço de conteúdo o traço de negação, por exemplo

$$\text{——}\!\top\!\text{—}\; 4+2=7.$$

21. Frege começa aqui a expor como ele constrói o cálculo proposicional (N. do T.).
22. [L. Rabus, 1835-1916] *Die neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete der Logik bei den Deutschen und die logische Frage*, Erlangen, 1880.

relação encerrada em nosso sinal. Pois o juízo hipotético[26] é a forma comum a todas as leis da natureza e a forma de todas as relações causais em geral. A linguagem corrente não permite que se traduza esse sinal em todos os casos por "se". Ela só o admite naquele caso em que uma parte do conteúdo, como o x aqui, é indeterminada e confere ao todo uma generalidade[27]. Se substituirmos x por 2, já não será adequado traduzir



por

"se $2 + 2 = 4$, então $2^2 = 4$".

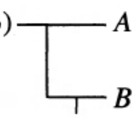
Consideremos agora as combinações do traço de implicação com os traços de negação na seguinte tabela:

1) 

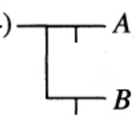
O caso "não *A* e *B*" é negado

2) 

O caso "*A* e *B*" é negado: *A* e *B* excluem-se mutuamente.

3) 

O caso "não *A* e não *B*" é negado: *A* ou *B*.

4) 

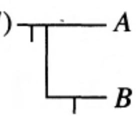
O caso "*A* e não *B*" é negado.

5) 

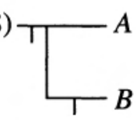
O caso "não *A* e *B*" é afirmado: *B* e não *A*.

6) 

O caso "*A* e *B*" é afirmado: *A* e *B*.

7) 

O caso "não *A* e não *B*" é afirmado: nem *A* nem *B*.

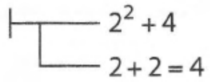
8) 

O caso "*A* e não *B*" é afirmado: A e não B.

26. Por 'juízo hipotético' (*hypothetische Urteil*) cumpre entender o que mais tarde Russell veio a denominar de 'implicação material' (N. do T.).

27. Essa 'parte indeterminada', como está escrito, Frege virá mais tarde chamar de 'indicador indefinido'. Cf. cap. 5, n. 10 (N. do T.).

relação encerrada em nosso sinal. Pois o juízo hipotético[26] é a forma comum a todas as leis da natureza e a forma de todas as relações causais em geral. A linguagem corrente não permite que se traduza esse sinal em todos os casos por "se". Ela só o admite naquele caso em que uma parte do conteúdo, como o x aqui, é indeterminada e confere ao todo uma generalidade[27]. Se substituirmos x por 2, já não será adequado traduzir



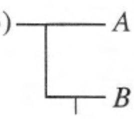
por

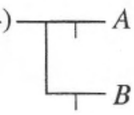
"se $2 + 2 = 4$, então $2^2 = 4$".

Consideremos agora as combinações do traço de implicação com os traços de negação na seguinte tabela:

1)  O caso "não *A* e *B*" é negado

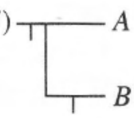
2)  O caso "*A* e *B*" é negado: *A* e *B* excluem-se mutuamente.

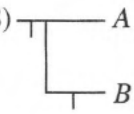
3)  O caso "não *A* e não *B*" é negado: *A* ou *B*.

4)  O caso "*A* e não *B*" é negado.

5)  O caso "não *A* e *B*" é afirmado: *B* e não *A*.

6)  O caso "*A* e *B*" é afirmado: *A* e *B*.

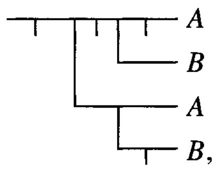
7)  O caso "não *A* e não *B*" é afirmado: nem *A* nem *B*.

8)  O caso "*A* e não *B*" é afirmado: A e não B.

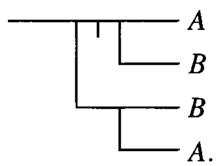
26. Por 'juízo hipotético' (*hypothetische Urteil*) cumpre entender o que mais tarde Russell veio a denominar de 'implicação material' (N. do T.).

27. Essa 'parte indeterminada', como está escrito, Frege virá mais tarde chamar de 'indicador indefinido'. Cf. cap. 5, n. 10 (N. do T.).

Ao colocarmos o traço de negação no traço de conteúdo das expressões que se encontram na coluna esquerda [da tabela acima], obtemos as expressões que estão na coluna direita. O caso negado à esquerda é sempre afirmado à direita. A segunda expressão resulta da primeira, mediante a substituição da negação de A por A. Na expressão verbal, as duas negações de A se anulam. A terceira expressão resulta da primeira, e a quarta da segunda, pela substituição de B por sua negação. O "ou" do terceiro caso é o "ou" não-exclusivo. O "ou" exclusivo pode ser expresso da seguinte forma:



ou também



Faço agora uma interrupção para responder a algumas objeções de Schröder. Ele compara a minha representação do "A ou B" exclusivo com seu modo de escrever

$$ab_1 + a_1b = 1$$

e critica, aqui como em outros lugares, a grande perda de espaço de minha conceitografia. De fato, não se pode negar que minha expressão toma mais espaço que a de Schröder, que por sua vez é mais extensa que a expressão original de Boole:

$$a + b = 1.$$

Mas esta objeção tem por base a concepção de que minha conceitografia deva ser uma representação da lógica abstrata[28]. As fórmulas [da minha conceitografia] são apenas esquemas vazios. Na aplicação das mesmas, deve-se pensar na substituição de A e B por fórmulas inteiras (*ganze Formeln*), ou talvez por extensas equações, congruências, projeções. Sendo assim, a questão assume todo um outro aspecto. A desvantagem da perda de espaço da conceitografia transforma-se vantajosamente em inteligibilidade, e a vantagem da concisão de Boole transforma-se desvantajosamente em ininteligibilidade. A conceitografia vale-se da dupla dimensão da superfície em que se escreve, ao permitir que os conteúdos asseríveis se sucedam de cima para baixo, enquanto que cada um destes se estende da esquerda para a direita. Assim, cada um dos conteúdos é claramente separado dos demais, mas suas relações lógicas são facilmente apreendidas. Em Boole, ter-se-ia uma única linha, com freqüência de comprimento excessivo. Certamente seria injusto atribuir a Boole, que jamais pensou em tal emprego para as suas fórmulas, as desvantagens facilmente reconhecíveis que daí resultam. Mas seria também injusto considerar uma deficiência da conceitografia a perda de espaço no caso da mera indicação de conteúdo.

Ao acima exposto, relaciona-se uma outra observação de Schröder, a saber, que minha linguagem formular seria uma concessão ao costume japonês de escrita vertical. De fato, isto parece corresponder à verdade enquanto se representam apenas as formas lógicas abstratas. Mas quando se imagina a substituição de letras isoladas por fórmulas inteiras, digamos, equações aritméticas[29], verifica-se que nada há aqui de excepcional. Pois, em toda dedução aritmética, raramente as equações são escritas uma ao lado da outra, mas faz-se com que se sucedam, para maior clareza de disposição, de cima para baixo[30].

Assim, em sua apreciação, Schröder pressupõe a possibilidade de uma comparação imediata entre minha conceitografia e a linguagem formular de Leibniz e Boole, possibilidade esta inexistente. Ele julga contribuir para uma apreciação equilibrada dos dois pontos de vista, observando que os dois simbo-

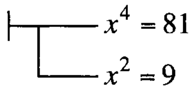
28. Aqui, Frege observa uma vez mais que sua conceitografia não é uma mera lógica abstrata, como o é, em seu entender, a linguagem formular de Boole-Schröder. Suas fórmulas não se destinam a resolver problemas criados por ela própria. Suas expressões, pelo contrário, são esquemas vazios que se destinam a representar a aritmética e, possivelmente, outros setores do conhecimento (N. do T.).

29. Tenha-se presente que Frege emprega, por vezes, tanto a palavra *Gleichung* quanto *Arithmetik* em sentido mais extenso que o usual (N. do T.).

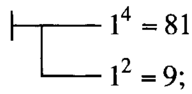
30. Frege deixa bem claro aqui o que o inspirou a se servir da dupla dimensão, e ainda nos diz que outro sentido não tem senão o da clareza e transparência das fórmulas (N. do T.).

lismos não são essencialmente diferentes, posto que se pode passar de um para o outro. Mas isto nada prova. Quando um mesmo domínio é representável por meio de dois sistemas de sinais, segue-se obviamente que uma transposição ou tradução de um para outro será possível. Mas desta possibilidade nada mais se segue senão a existência de um domínio comum; contudo, os sistemas de sinais podem ser, apesar disso, radicalmente diferentes.

Pode-se perguntar se essa tradução é sempre factível, ou se por ventura a minha linguagem formular abrange um domínio menor. Schröder afirma que minha conceitografia quase nada tem em comum com o cálculo booleano dos conceitos. Disto, poder-se-ia supor que ela [a conceitografia] não fosse capaz de representar a subordinação de conceitos. Um exemplo nos convencerá do contrário. O juízo

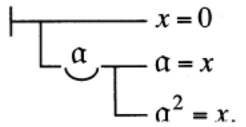


expresso em palavras é: se $x^2 = 9$, então $x = 81$. Pode-se denominar um número cujo quadrado seja 9 de "uma raiz quadrada de 9"[31], e um número cuja quarta potência seja 81 de "uma raiz quádrupla de 81"[32], e a seguir traduzir: todas as raízes quádruplas de 9 são raízes quartas de 81. Aqui, o conceito "raiz quadrada de 9" está subordinado ao conceito "raiz quarta de 81". A letra x tem a finalidade de tornar geral a totalidade do juízo, no sentido de que seu conteúdo seja verdadeiro (*gelten solle*), independentemente do que se coloque no lugar de x. Resulta num juízo verdadeiro (*richtig*), mesmo se, por exemplo, colocarmos 1 no lugar de x:

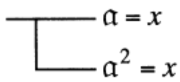


pois o caso em que $1^2 = 9$ e 1^4 não é igual a 81 deve ser negado, uma vez que 1^2 não é igual a 9. Torna-se, às vezes, necessário confinar a generalidade a uma parte do juízo. Sirvo-me, então, de letras góticas em vez das latinas, como em

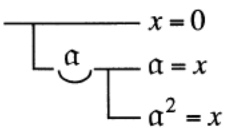
31. O texto original encontra-se sem aspas (N. do T.).
32. O texto original encontra-se sem aspas (N. do T.).



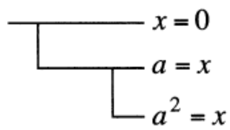
que, expresso em palavras, é: se toda raiz quadrada de x é igual ao próprio x, então $x = 0$. Aqui, a concavidade (*Höhlung*)[33] contendo $\mathfrak{a}$ indica que a generalidade expressa por $\mathfrak{a}$ deve-se limitar ao conteúdo de[34]



Vejo nesse modo de simbolizar um dos mais importantes aspectos de minha conceitografia; pois é através dele que ela marca uma etapa, enquanto representação das formas lógicas, sobre o modo de notar de Boole. Assim, no lugar da elaboração artificial de Boole, é estabelecida uma relação orgânica entre *proposições primárias* e *secundárias*. Schröder reconhece a vantagem que reside nesse procedimento, já que tenta introduzi-lo na linguagem formular de Boole. Mas, com isto, ele mostra não ter apreendido o âmago da questão, isto é, a delimitação do escopo ao qual a generalidade se deve confinar. Segundo o proposto por Schröder, a diferença entre



e



não seria claramente vislumbrada[35]. E, no entanto, a diferença é tão grande que a segunda expressão é falsa, enquanto que a primeira é verdadeira. Outro inconveniente do proposto por Schröder é requerer ainda um outro sinal de negação.

33. Cf. cap. 2, nota 12, (N. do T.).
34. Frege mostra assim como emerge naturalmente a subordinação dos conceitos ao introduzir uma concavidade no traço de conteúdo da fórmula (N. do T.).
35. O leitor terá notado que ambas as fórmulas encerram letras latinas, mas a fórmula à esquerda encerra também letras góticas. As letras latinas (alguns dizem 'itálicas') servem para expressar a generalidade quando o escopo do quantificador universal abrange a totalidade da fórmula. As letras góticas são utilizadas quando o escopo abrange apenas uma parte da fórmula (N. do T.).

Iria longe demais se quisesse responder a todas as objeções de Schröder[36]. Por ora deve bastar ter retificado sua concepção errônea quanto à finalidade da conceitografia e, com isto, ter mostrado o desacerto de pelo menos uma parte de suas observações críticas. Tivesse ele tentado traduzir para o sistema que diz ser o melhor algumas das fórmulas da terceira parte de minha obra[37], e as que, há algum tempo, tive a honra de lhe apresentar, e teria verificado, na dificuldade desta tarefa, o quanto há de errôneo em sua concepção. De qualquer forma, sou-lhe grato pela resenha de minha obra.

36. Para maiores detalhes, cf. G. Frege, 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' e 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift', *Nachgelassene*, pp. 9-59 (N. do T.).
37. Frege refere-se aqui a seu livro *Begriffsschrift*, 3ª parte (N. do T.).

5

FUNÇÃO E CONCEITO
(1891)

PREFÁCIO

Publico aqui esta conferência em separata na esperança de que encontrará alguns leitores para os quais permaneceria ignorada entre as atas da Sociedade de Medicina e Ciências Naturais de Jena. Como anteriormente indiquei, é meu propósito expor, proximamente, como são expressas em minha conceitografia as definições fundamentais da aritmética e como delas se podem tirar demonstrações utilizando-se apenas de meus sinais. Para este propósito, é interessante remeter para a presente conferência e assim poupar o leitor de explicações que talvez desgostariam a alguns por não serem diretamente interessados pelo tema, enquanto que outros, pelo contrário, lamentariam sua ausência. Minha palestra, visto o lugar em que foi proferida, não se dirige unicamente a matemáticos; e assim procurei utilizar um modo de expressão a todos compreensível, na medida em que me permitiram o tempo disponível e o assunto. Possa esta despertar o interesse pelo tema em círculos mais amplos de estudiosos, especialmente entre os lógicos.

Conferência proferida na reunião de 9 de janeiro de 1891 na Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, e no mesmo ano publicada sob a forma de um opúsculo de 31 p., Jena, H. Pohle. Republicado em G. Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, ed. G. Patzig, Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht, 1966, pp. 17-39.

Há muito tempo[1], tive a honra de falar a esta Sociedade sobre o sistema que denominei conceitografia. Hoje gostaria de elucidar este assunto sob outro ângulo e falar-lhes sobre alguns complementos e novas concepções cuja necessidade me ocorreu desde então. Não pretendo dar uma exposição completa de minha conceitografia, mas apenas elucidar algumas idéias fundamentais.

Meu ponto de partida é o que, em matemática, se chama de função. Esta palavra não teve inicialmente um significado tão amplo quanto o que mais tarde veio a receber. Será bom começar nossas reflexões com o uso originário desta palavra e, só após, considerar suas extensões posteriores. Por enquanto, só falarei de funções de um único argumento. Uma expressão cientifica só aparece com sua mais nítida referência quando se faz necessária para a enunciação de leis. Tal é o que se deu com [a palavra] função quando se descobriu a Análise superior[2], e se procurou estabelecer leis que valessem para as funções em geral. Há que se recuar, pois, ao tempo da descoberta da Análise superior, caso se queira saber o que, de início, se entendeu em matemática pela palavra "função". A esta indagação, obtém-se não raramente a seguinte resposta: "por uma função de x entende-se uma expressão do cálculo que contenha x, uma fórmula que contenha a letra x". Desse modo, a expressão

$$2 \cdot x^3 + x$$

seria uma função de x, e

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

seria uma função de 2. Essa resposta, porém, não nos pode satisfazer, na medida em que não distingue a forma do conteúdo, o sinal do designado, erro este aliás freqüente nos escritos matemáticos atuais, inclusive de autores renomados. Já apontei, em ocasião anterior[3], os defeitos das atuais teorias formais da aritmética[4]. Fala-se aí de sinais que não têm, nem devem ter, qualquer conteú-

1. Em 10 de janeiro de 1879 e a 27 de janeiro de 1882.
2. Sobre este conceito, cf. Introdução, n. 74 (N. do T.).
3. *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, § 92 ss; e ainda ['Über formale Theorien der Arithmetik'] *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft*, 1885, reunião de 17 de julho.
4. Tal é a teoria segundo a qual a matemática é apenas um acervo de símbolos manipulados segundo regras estruturais. Cf. Introdução, n. 34 (N. do T.).

do; no entanto, logo se lhes atribuem propriedades que só são pertinentes, de modo racional, ao conteúdo do sinal. O mesmo se dá também aqui; uma mera expressão, a forma a ser preenchida por um conteúdo, não pode ser a essência de uma coisa; só o pode ser o próprio conteúdo. Mas qual é o conteúdo, a referência[5] de "$2 \cdot 2^3+2$"? A mesma que a de "18" ou de "$3 \cdot 6$". A igualdade[6] $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ expressa que a referência da seqüência de sinais à direita [do sinal de igualdade] é a mesma que a referência da seqüência de sinais à esquerda. Devo aqui me opor à opinião de que, por exemplo, 2+5 e 3+4 sejam iguais, mas não o mesmo. Esta noção se baseia na confusão já mencionada entre forma e conteúdo, sinal e designado. É como se se quisesse considerar a violeta perfumada distinta da *viola odorata*, porque os nomes soam diversamente. A diversidade de designações não justifica, por si só, uma diversidade de designados. No presente caso, esta norma é menos evidente, porque a referência do numeral 7 não é sensorialmente perceptível. A tendência, atualmente muito difundida, de não reconhecer como objeto a não ser o que possa ser percebido pelos sentidos, leva a considerar os próprios numerais como números, a considerá-los como o próprio objeto da reflexão[7] e, assim sendo, 7 e 2 + 5 seriam certamente distintos. Mas uma tal concepção é insustentável, pois não podemos falar de quaisquer propriedades aritméticas dos números sem recorrer à referência dos numerais. A propriedade do 1, por exemplo, de que, multiplicado por si mesmo, resulta novamente nele próprio, seria um puro devaneio; pois nenhuma investigação microscópica ou química, por mais aprofundada que fosse, jamais poderia descobrir esta propriedade na inocente imagem que chamamos o numeral um. Talvez alguns queiram ver aqui uma definição; mas nenhuma definição é criadora a ponto de poder dar a uma coisa propriedades

5. Aqui, a palavra *Bedeutung* é pela primeira vez utilizada por Frege com o significado inequívoco de "referência" (N. do T.).
6. A palavra *Gleichung* – normalmente traduzida por 'equação' – significa usualmente, quando explicitada de modo devido, uma igualdade que se dá entre duas expressões (isto é, termos abertos) que só é satisfeita para alguns valores de suas variáveis. Cumpre observar, porém, que Frege não raramente utiliza esta palavra em sentido bem mais amplo que o usual. Com efeito, ele se vale deste termo para rotular expressões da forma $2x + 3y=0$, igualdades como $2 \cdot 2 + 2 = 18$, percursos de valores como $'\varepsilon(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = {}'\alpha(\alpha \cdot [\alpha - 4])$, e também equivalências como $(2^2 = 4) = (2 > 1)$, ou ainda implicações materiais como 'se *A*, então *B*'. Como se vê, nem sempre Frege supõe que uma *Gleichung* envolva uma igualdade com as características acima descritas. E se assim é, ao se propor uma tradução para essa palavra, há que se ter presente seu contexto de aplicação; pois nem sempre é fácil decidir qual o termo a ser utilizado, se 'equação', ou 'igualdade', ou mesmo 'expressão' (N. do T.).
7. Cf. os artigos *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet*, de H. von Helmholtz, e *Über den Zahlbegriff*, de L. Krönecker (*Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinen fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Leipzig, 1887).

que esta nunca teve; salvo a propriedade de expressar e designar aquilo que a própria definição veio a introduzir[8]. Pelo contrário, as imagens que denominamos numerais têm propriedades físicas e químicas que dependem do material com que se escreve. Poder-se-ia imaginar que se introduzam, um dia, numerais completamente novos, assim como, por exemplo, os numerais arábicos substituíram os romanos. Ninguém acreditaria seriamente que, desse modo, obter-se-iam números inteiramente novos, objetos aritméticos com propriedades até então não investigadas. Assim, se temos que distinguir os numerais daquilo a que eles se referem, então se terá de reconhecer também que as expressões "2", "1 + 1", "3 – 1", "6:3" têm a mesma referência, pois não se pode ver onde estaria a diferença. Talvez se diga: 1 + 1 é uma soma, mas 6:3 é uma divisão. O que é, porém, 6:3? O número que multiplicado por 3 dá 6. Dizemos "*o* número" e não "um número"; com o artigo definido indica-se que há apenas um único número. Agora temos

$$(1+1)+(1+1)+(1+1)=6$$

e, portanto, (1 + 1) é exatamente o número que foi designado por (6:3). As diferentes expressões correspondem à diferentes expressões e aspectos, mas correspondem sempre à mesma coisa. De outro modo, a equação $x^2 = 4$ teria, além das duas raízes 2 e –2, também a raiz (1 + 1) e inúmeras outras, diferentes entre si, embora sob certo aspecto semelhantes. Ao se reconhecer somente duas raízes reais, rejeita-se a opinião de que o sinal de igualdade não significa uma coincidência total, mas apenas uma concordância parcial. Admitido isto, vemos que as expressões

$$“2 \cdot 1^3 + 1”,$$
$$“2 \cdot 2^3 + 2”,$$
$$“2 \cdot 4^3 + 4”$$

se referem a números, a saber, 3, 18 e 132. Assim, se a função nada mais fosse que a referência de uma expressão do cálculo[9], ela seria apenas um número e

8. A definição associa a um sinal um sentido ou uma referência. Não se pode propriamente falar de um sinal, nem de uma definição, onde sentido e referência não existirem.
9. Cf. nota a seguir (N. do T.).

nada traria de novo para a aritmética. É verdade que, ao se usar a palavra "função", pensa-se habitualmente em expressões em que um número é indicado indefinidamente[10] pela letra x como por exemplo em

$$\text{“}2 \cdot x^3 + x\text{”}$$

mas isto nada muda; pois também esta expressão indica indefinidamente um número; e nenhuma diferença essencial existe se eu escrevo este número ou se apenas escrevo "x".

No entanto, é precisamente pela utilização na escritura da letra "x", para indicar indefinidamente [um número], que somos levados a uma concepção correta de função. Denomina-se x de o argumento da função e, em

$$\text{“}2 \cdot 1^3 + 1\text{”},$$
$$\text{“}2 \cdot 4^3 + 4\text{”},$$
$$\text{“}2 \cdot 5^3 + 5\text{”},$$

reconhece-se novamente a mesma função, apenas com diferentes argumentos, a saber, 1, 4 e 5. Donde se depreende que o essencial a uma função[11] se encontra no que há de comum a essas expressões, a saber, no que permanece de

$$\text{“}2 \cdot x^3 + x\text{”}$$

quando se suprime a letra "x", o que se poderia escrever assim:

10. Como nos diz Frege, alguns sinais *designam* ou *referem-se* (*bezeichnen* ou *bedeuten*), enquanto que outros *indicam* (*andeuten*) ou *indicam indefinidamente* (*unbestimmt andeuten*). É, portanto, necessário distinguir nitidamente os verbos 'referir' e 'indicar'. Indicar é a função exercida por certos sinais, especialmente pelos nomes ou sinais funcionais. O sinal funcional 'x^2' não é dito referir-se ou designar os números 1, 4, 9 etc., mas os indica indefinidamente. A letra 'x' que ocorre no sinal funcional acima é por ele denominada de *indicador indefinido*, já que ela não se refere, mas indica indefinidamente os possíveis argumentos da função 'x^2'. Mas é preciso notar que Frege não diz que 'x^2' indica um número indefinido ou que 'x é uma mesa' indica uma mesa indefinida. Isto porque, segundo ele, nenhum objeto pode ser indefinido. Cf. cap. 11, 'Que é uma Função?' (N. do T.).
11. Frege nos diz aqui que sendo a função indefinível, sua natureza se apreende da estrutura da expressão funcional, mas não se identifica com esta. Uma expressão funcional, como '$2 \cdot x^3 + x$', encerra tanto componentes que designam como componentes que não designam (N. do T.).

$$“2 \cdot (\ \ )^3 + (\ \ )”.$$

Importa mostrar que o argumento não é parte da função, mas que compõe juntamente com a função um todo completo. A função, por si só, é dita incompleta, necessitada de complementação ou insaturada[12]. É aqui que as funções diferem essencialmente dos números. Sendo esta a essência da função, explica-se porque, de um lado, reconhecemos a mesma função em "$2 \cdot 1^3 + 1$" e "$2 \cdot 2^3 + 2$", não obstante essas expressões se referirem a diferentes números, enquanto que, por outro lado, não encontramos a mesma função em "$2 \cdot 1^3 + 1$" e "$4 - 1$", apesar de seus valores numéricos serem o mesmo. Também vemos agora como é fácil ser erroneamente induzido a ver na forma da expressão o que é essencial à função. Para reconhecer a função, é necessário decompor a expressão onde ela ocorre, e a possibilidade de tal decomposição é sugerida pela estrutura mesma da expressão.

As duas partes em que a expressão do cálculo é decomposta, o sinal de argumento e a expressão da função, são heterogêneas: o argumento é um número, um todo completo em si mesmo, o que a função não é. Isto pode ser comparado com a divisão de uma reta num ponto[13]. Fica-se inclinado a incluir o ponto de divisão em ambas as semi-retas. Mas caso se queira fazer a divisão de maneira rigorosa, de modo a não contar nada duas vezes e nem deixar nada de fora, tem-se que incluir o ponto de divisão em apenas uma das semi-retas. Esta semi-reta se tornará inteiramente fechada em si mesma e pode ser comparada ao argumento, enquanto que à outra semi-reta faltará alguma coisa: o ponto de divisão, que poderia ser denominado de seu ponto terminal, não lhe pertence. Somente completando-a com esse ponto terminal, ou com uma reta com dois pontos terminais, obtém-se algo completo. Se dissermos, por exemplo, "a função $2 \cdot x^3 + x$", x não deve ser considerado como pertencente à função, pois esta letra só serve para indicar a espécie de complementação de que a função necessita, mostrando os lugares onde inserir o sinal do argumento.

12. Frege entende que cumpre tomar o par função/argumento, tal como se dá com o par conceito/objeto, como 'um todo completo'. Mediante esse par podemos prescindir do par sujeito/predicado, de todo inadequado, em seu entender, para exibir as múltiplas facetas do pensamento (N. do T.).

13. Esta é outra explicação figurada, proposta por Frege, da natureza incompleta ou insaturada da função, isto é, uma função é como um intervalo aberto da reta (N. do T).

Aquilo que resulta quando se complementa a função por seu argumento denominamos "o valor da função para este argumento"[14]. Desse modo, 3 é o valor da função $2 \cdot x^2 + x$ para o argumento 1, já que temos $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.

Existem funções, como por exemplo $2 + x - x$ ou $2 + 0. x$, cujo valor é sempre o mesmo qualquer que seja seu argumento, já que temos $2 = 2 + x - x$ e $2 = 2 + 0 \cdot x$. Ora, se contássemos o argumento como pertencente a essa função, deveríamos sustentar que o número 2 é essa função. Mas isto é incorreto. Embora aqui o valor da função seja sempre 2, a função em si mesma deve ser distinguida de 2; pois a expressão da função deve sempre mostrar um ou mais lugares a serem preenchidos pelo sinal do argumento.

O método da geometria analítica[15] fornece-nos um meio de tornar intuitivos os valores de uma função para diferentes argumentos. Pois, se considerarmos o argumento como um valor numérico da abscissa de um ponto e o valor correspondente da função como o valor numérico de sua ordenada, obtemos uma totalidade de pontos que se apresenta à intuição, nos casos correntes, como uma curva. Cada ponto da curva corresponde a um argumento e ao correspondente valor da função. Assim,

$$y = x^2 - 4x$$

corresponde a uma parábola, onde "y" indica o valor da função e o valor numérico da ordenada, e "x" indica o argumento e o valor numérico da abscissa. Se compararmos essa função com

$$x(x-4),$$

observamos que elas tomam sempre o mesmo valor para o mesmo argumento. Temos em geral

$$x^2 - 4x = x(x-4),$$

qualquer que seja o número que tomarmos para x. Donde a curva que obtemos de

14. Essas aspas não existem no texto original (N. do T.).

15. Parte da matemática que estuda as propriedades das linhas, superfícies e volumes mediantes funções (ou equações ou expressões analíticas) associadas a essas entidades (N. do T.).

$$y = x^2 - 4x$$

ser a mesma curva que resulta de

$$y = x(x - 4).$$

Expresso esse fato do seguinte modo: a função $x\,(x - 4)$ tem o mesmo percurso de valor[16] que a função $x^2 - 4x$.

Quando escrevemos

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

não fizemos uma função igual[17] à outra, mas apenas igualamos seus valores[18]. E se entendemos essa equação como válida (*gelten soll*) para qualquer argumento que possa substituir x, então expressamos que uma equação vale de maneira geral[19]. Mas podemos também dizer: "o percurso de valor da função $x\,(x - 4)$ é igual ao da função $x^2 - 4x$", e aqui temos uma igualdade entre percursos

16. O termo fregeano *Wertverlauf* é aqui traduzido de maneira quase literal por 'percurso de valor'. Essa noção encerra de início uma dificuldade, já que Frege oferece para ela duas explicações não coincidentes: uma, na passagem acima, e outra, nos *Grundgesetze*, I, § 36. Além dessa dificuldade, ainda existe a questão de saber se o percurso de valor de uma função é ou não um objeto. Pela explicação que lemos acima, a noção de percurso de valor de uma função não se dá isoladamente em si mesma, mas emerge na medida em que estabelece uma relação entre duas funções. Duas funções têm o mesmo percurso de valor se elas tiverem para o mesmo argumento o mesmo valor, *i. e.*, se tiverem o mesmo gráfico. Tal é o que se dá com as funções $x^2 - 4x$ e $x\,(x - 4)$, razão pela qual são ditas terem o mesmo percurso de valor. Só percursos de valor, por serem saturados, podem ser igualados, mas nunca funções, já que são insaturadas (N. do T.).
17. Frege, como se sabe, não admite que se possa igualar duas funções (e nem dois conceitos). Em seu entender, apenas objetos podem ser igualados. Contudo, a extensão dos conceitos e os percursos de valores das funções, que são objetos saturados, podem ser igualados, e por seu intermédio podemos vislumbrar uma correspondência com as funções. Cf. *Kleine Schriften*, p. 184 (N. do T.).
18. A expressão '$x^2 - 4x = x\,(x - 4)$', e todas as congêneres, não deve ser tomada, nos diz Frege, como expressando a igualdade de duas funções, '$x^2 - 4x$' e '$x\,(x - 4)$', o que seria falso, já que não se pode dizer que duas funções sejam iguais (N. do T.).
19. O enunciado acima expressa a condição sob a qual uma equação tem plena generalidade: 'o que quer que x possa ser, $x^2 - 4x = x\,(x - 4)$'. Por força dessa generalidade, este princípio se aplica sem restrições aos números (N. do T.).

de valores[20]. O fato de que seja possível conceber uma igualdade universalmente válida entre valores de funções [para um argumento][21] como uma igualdade entre percursos de valores, não pode, creio eu, ser demonstrada: deve ser considerada uma lei fundamental [*i. e.*, um postulado] da lógica[22].

Podemos, ademais, introduzir uma notação abreviada para o percurso de valor de uma função. Para esse fim, substituo o sinal de argumento na expressão da função por uma vogal grega, encerro o todo entre parênteses e anteponho a eles a mesma letra grega com um espírito fraco[23]. Assim,

$$\dot{\varepsilon}\left(\varepsilon^2 - 4\varepsilon\right)$$

é o percurso de valor da função $x^2 - 4x$, e

$$\dot{\alpha}\left(\alpha \cdot [\alpha - 4]\right)$$

é o percurso de valor da função $x\,(x - 4)$; de modo que

$$\text{“}\varepsilon\left(\varepsilon^2 - 4\varepsilon\right) = \alpha\left(\alpha \cdot [\alpha - 4]\right)\text{”}$$

expressa que o primeiro percurso de valor é igual ao segundo. Escolhi deliberadamente diferentes letras gregas para indicar que nada nos obriga a escolhê-las.

20. Mas também é possível ver, assim nos diz a passagem acima, nesta generalidade que 'a função $x\,(x-4)$ tem o mesmo percurso de valor que a função $x^2 - 4x$' e sendo assim, Frege foi levado a introduzir a noção de percurso de valor de uma função (N. do T.).
21. A noção de igualdade entre percursos de valor será, mais tarde, nos *Grundgesetze*, I, § 3, reformulada, dando origem ao quinto axioma (N. do T.).
22. Em algumas expressões que encontramos nos tratados de matemática corrente, a palavra "função" corresponde certamente ao que chamei aqui de percurso de valores de uma função. Mas a função, no sentido em que a emprego, é logicamente anterior.
23. Frege considera a notação para o percurso de valor das funções uma das mais importantes contribuições de sua conceitografia. Neste sentido, ele se vale da vogal grega ε afetada pelo com o espírito fraco, para indicar o percurso de valor de uma função. No grego, diz-se 'espírito fraco' o sinal que indica ausência de aspiração. É óbvio que esse fato da gramática grega nada tem a ver com o que aqui se passa. Com efeito, a toda função se associa uma notação para representar o percurso de valor desta função. Assim, a expressão funcional $x^2 - 4x$ tem na expressão 'ε $(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$ a representação de seu percurso de valor. Por fim, cumpre dizer que Frege se utiliza de letras gregas para distinguir uma igualdade entre percursos de valor da quantificação universal de uma igualdade entre valores de uma função (N. do T.).

Na expressão

$$“x^2 - 4x = x(x-4)”$$

[tanto o lado esquerdo como o direito] expressam certamente o mesmo sentido, caso entendamos essa igualdade como o fizemos antes, mas o expressa de maneira diferente. Ela representa esse sentido à maneira generalizada de uma equação, enquanto que a expressão que acabamos de introduzir [a que utiliza letras gregas] é simplesmente uma igualdade [entre percursos de valores], na qual tanto o lado direito como o lado esquerdo têm uma referência completa em si mesma. Em

$$“x^2 - 4x = x(x-4)”$$

o lado esquerdo, considerado isoladamente, indica um número indefinidamente, e o mesmo se dá com o lado direito. Se tivéssemos apenas “$x^2 - 4x$”, poderíamos também escrever em seu lugar “$y^2 - 4y$”, sem alterar o sentido; pois “y”, assim como “x”, também indica um número indefinidamente[24]. Mas se associarmos os dois lados em numa equação temos que escolher a mesma letra para ambos os lados, e assim expressamos algo que não está contido nem no lado esquerdo por si só, nem no lado direito, nem no sinal de igualdade, a saber, a generalidade. Naturalmente, o que expressamos é a generalidade de uma equação, mas basicamente é uma generalidade.

Assim, como por uma letra se indica um número indefinidamente quando se visa a expressar a generalidade, também se necessita de letras para indicar uma função indefinidamente. Para esse fim, empregam-se ordinariamente as letras f e F, de tal modo que, em “$f(x)$” e “$F(x)$”, x representa o argumento. Aqui a necessidade de complementação da função é expressa pelo fato de que à letra f ou F segue-se um par de parênteses, cujo espaço interior deve receber o sinal de argumento. Desse modo,

$$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$$

indica o percurso de valor de uma função ainda indefinida.

24. Cf. cap. 5, n. 10 (N. do T.).

Mas como foi ampliada a referência da palavra "função" com o progresso da ciência? Podem-se aqui distinguir duas direções[25].

Em primeiro lugar, foi ampliado o domínio das operações de cálculo que têm lugar na construção de uma função. Além da adição, multiplicação, potenciação e de suas operações inversas[26], foram acrescentados diferentes procedimentos de avaliação de limites, nem sempre tendo uma clara consciência de que se estava assim adotando algo essencialmente novo. Foi-se ainda mais longe, e se fez necessário recorrer à linguagem corrente, uma vez que a linguagem simbólica da Análise se tornara insuficiente; por exemplo, no caso de uma função cujo valor para argumentos racionais é 1, e para argumentos irracionais é 0[27].

Em segundo lugar, foi ampliado o domínio do que pode ser tomado como argumento e valor de uma função pela admissão dos números complexos. Com isso, o sentido das expressões "soma", "produto", etc teve de ser simultaneamente redefinido[28].

Agora, vou ainda mais longe em ambas as direções[29]. Antes de mais nada, aos sinais +, – etc., utilizados para a formação de uma expressão funcional, acrescento ainda sinais como =, >, <, de modo que se possa falar da função $x^2 = 1$, onde x, como acima, está no lugar do argumento[30]. A primeira pergunta que aqui surge é quais são os valores desta função para diferentes argumentos. Se substituirmos x, sucessivamente, por –1, 0, 1, 2, obtemos

$$(-1)^2 = 1,$$
$$0^2 = 1,$$
$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 1.$$

25. Frege assinala as duas formas fundamentais, historicamente observadas, de como se processou a ampliação do âmbito de abrangência das funções. Uma é a que diz respeito as possíveis operações do cálculo, que ele examina logo a seguir, cf. pp. 91-93; outra é a que diz respeito à ampliação de seus possíveis argumentos, que ele tratará mais adiante, cf. p. 95 (N. do T.).
26. As operações inversas são, respectivamente, a subtração, a divisão e a radiciação (N. do T.).
27. O autor faz aqui menção à função de Dirichlet que é assim expressa: F(x) é igual a 1, caso $x \in Q$; e igual a 0, caso $x \in R - Q$ (N. do T.).
28. Tal é o que se dá, por exemplo, com expressões do tipo '$(2 + 3i) + (5 + 4i) = 7 + 7i$'. Aqui o sinal '+' assume um significado distinto daquele que se observa na aritmética elementar (N. do T.).
29. Aqui tem lugar o que seria na verdade a contribuição pessoal de Frege para a história da função (N. do T.).
30. Note-se que '+', '–' etc. geram termos complexos a partir de termos simples (ou menos complexos). Por outro lado, '=', '>' e '<' geram sentenças simples a partir de termos (simples ou complexos). Daí, a argumentação de Frege (N. do T.).

Dessas igualdades, a primeira e a terceira são verdadeiras, e as demais são falsas. Assim, digo: "o valor de nossa função é um valor de verdade"[31] e distingo o valor de verdade em o verdadeiro e o falso[32]. Chamo o primeiro, para abreviar, de o verdadeiro, e o segundo, de o falso. Conseqüentemente, "$2^2 = 4$", por exemplo, refere-se ao verdadeiro, tal como, digamos, "2^2" se refere a 4. E "$2^2 = 1$" se refere ao falso. Assim,

$$\text{“}2^2 = 4\text{”},\quad \text{“}2 > 1\text{”},\quad \text{“}2^4 = 4^2\text{”}$$

referem-se à mesma coisa, a saber, o verdadeiro, de modo que em

$$\left(2^2 = 4\right) = \left(2 > 1\right)$$

temos uma igualdade correta (*richtige Gleichnung*)[33].

Pode-se fazer aqui a objeção de que "$2^2 = 4$" e "$2 > 1$" significam coisas totalmente diferentes, expressam pensamentos totalmente distintos.Mas também "$2^4 = 4^2$" e "$4 \cdot 4 = 4^2$" expressam pensamentos diferentes, e apesar disto, pode-se substituir "2^4" por "$4 \cdot 4$", uma vez que ambos os sinais têm a mesma referência. Por conseguinte, "$2^4 = 4^2$" e "$4.4 = 4^2$" têm também a mesma referência. Disso concluímos que a igualdade de referências não têm como conseqüência a igualdade de pensamentos. Ao dizermos "a estrela vespertina é um planeta cuja revolução é menor que a da terra", o pensamento que expressamos é diferente do da sentença "a estrela matutina é um planeta cuja revolução é menor que a da terra", pois quem não souber que a estrela matuti-

31. A palavra *Wahrheitswert*, 'valor de verdade' (*i. e.*, entender a verdade e a falsidade como um valor que certas funções podem assumir para determinados argumentos) é uma criação de Frege, como atesta o presente artigo. Mas o conceito associado a essa palavra remonta pelo menos a C. S. Peirce (1885) que faz uso de maneira explícita e sistemática dos dois valores de verdade. Cf. *Collected Papers*, vol. 3, pp. 210-238 (N. do T.).

32. Frege aqui assinala ter atingido uma abrangência maior quanto às possíveis operações de cálculo, no momento em que envolve valores de verdade como valores e argumentos de funções (N. do T.).

33. O fato de ocorrer na fórmula acima o sinal de igualdade unindo duas sentenças poderia sugerir que Frege não distingue igualdade (*i. e.*, uma relação entre termos) de equivalência (*i. e.*, uma ralação entre sentenças), ou então que só dispunha de um único sinal, '=', para representar esses dois conceitos. Na verdade, não existe tal confusão conceitual por parte de Frege. Para ele, tanto '($2^2 = 4$)' como '($2 > 1$)', por expressarem conteúdos asseríveis, referem-se a valores de verdade, que são em seu entender objetos, e como qualquer par de objetos cumprem ser ou não igualados. Eis a explicação para a presença na fórmula acima do sinal de igualdade (N. do T.).

na é a estrela vespertina, pode considerar uma das sentenças como verdadeira e a outra como falsa. E, no entanto, ambas as sentenças devem ter a mesma referência, pois apenas se trocaram as palavras "estrela vespertina" e "estrela matutina", que têm a mesma referência, isto é, são nomes próprios do mesmo corpo celeste[34]. Temos de distinguir assim sentido de referência. Certamente, "2^4" e "$4 \cdot 4$" têm a mesma referência, isto é, são nomes próprios do mesmo número, mas não têm o mesmo sentido. Daí terem "$2^4 = 4^2$" e "$4 \cdot 4 = 4^2$" a mesma referência, mas não o mesmo sentido; o que, neste caso, significa não conter o mesmo pensamento[35].

Desse modo, com o mesmo direito com que escrevemos

$$“2^4 = 4 \cdot 4”$$

podemos também escrever

$$“\left(2^4 = 4^2\right) = \left(4 \cdot 4 = 4^2\right)”$$

e

$$“\left(2^4 = 4\right) = \left(2 > 1\right)”.$$

Assim, poder-se-ia perguntar qual é a finalidade de se admitir os sinais =, >, < no âmbito dos sinais que permitem formar uma expressão funcional. Parece que um número cada vez maior de defensores está sendo conquistado pela opinião de que a aritmética é um desenvolvimento expansivo da lógica, de que uma fundamentação mais rigorosa das leis aritméticas as reduz a leis puramente lógicas, e a tais leis apenas. Sou também dessa opinião, e nela fundamento a exigência de a linguagem simbólica aritmética ser expandida num simbolismo lógico[36]. Tenho agora de indicar como ocorre esta expansão no caso em questão.

34. Ao assim argumentar, Frege supõe a validade sem restrição do princípio de substituibilidade *salva veritate*. Cf. *infra* pp. 140s (N. do T.).

35. Não desconheço que essa convenção possa parecer, à primeira vista, arbitrária e artificial, nem que não se possa exigir uma justificação mais minuciosa. Cf. meu artigo "Sobre o Sentido e a Referência".

36. Tal é o programa logicista, cf. p. 20s (N. do T.).

Vimos que o valor da função $x^2 = 1$ é sempre um dos dois valores de verdade. Ora, se para um argumento determinado, por exemplo –1, o valor da função for o verdadeiro, podemos expressá-lo como se segue: "o número –1 tem a propriedade de que seu quadrado é 1", ou mais concisamente: "–1 é uma raiz quadrada de 1" ou "–1 cai sob o conceito de raiz quadrada de 1". Se o valor da função $x^2 = 1$ for o falso, para um argumento, por exemplo, 2, podemos expressá-lo como se segue: "2 não é a raiz quadrada de 1" ou "2 não cai sob o conceito de raiz quadrada de 1". Vemos assim quão estreitamente ligado está o que se chama, em lógica, de conceito com o que nós chamamos de função. Com efeito, pode-se dizer imediatamente: um conceito é uma função cujo valor é sempre um valor de verdade[37]. Também o valor da função

$$(x+1)^2 = 2(x+1)$$

é sempre um valor de verdade. É o verdadeiro, por exemplo, para o argumento – 1, o que se expressa deste modo: –1 é um número que é uma unidade menor do que outro número cujo quadrado é igual ao seu dobro. Com isto, expressa-se que o número –1 cai sob um conceito. As funções

$$x^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad (x+1)^2 = 2(x+1)$$

têm sempre o mesmo valor para o mesmo argumento, a saber, o verdadeiro para os argumentos – 1 e +1; e o falso para todos os demais argumentos. De acordo com nossas convenções anteriores, diremos, pois, que essas funções têm os mesmos percursos de valores, e expressaremos isto em sinais, assim:

$$\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \dot{\alpha}\left([\alpha+1]^2 = 2[\alpha+1]\right).$$

37. Em seus escritos iniciais, Frege se utiliza da palavra 'conceito' (*Begriff*) em sentido, digamos, tradicional. É na presente obra que de maneira sistemática ele imprime a essa palavra a acepção de *função de um argumento cujo valor é sempre um valor de verdade* (N. do T.).

Em lógica, chama-se isto de igualdade de extensão dos conceitos. Portanto, podemos designar como extensão de um conceito o percurso de valor de uma função cujo valor, para qualquer argumento, é um valor de verdade.

Não nos deteremos em equações e inequações. A forma lingüística de uma equação é uma sentença assertiva (*Behauptungssatz*)[38]. Tal sentença tem como sentido um pensamento – ou, pelo menos, se propõe a ter –, e esse pensamento é, em geral, verdadeiro ou falso. O pensamento tem em geral um valor de verdade, valor que deve ser considerado como a referência da sentença, assim como, digamos, o número 4 é a referência da expressão "2 + 2", e Londres é a referência da expressão "a capital da Inglaterra".

Podemos nos propor a analisar as sentenças assertivas, tal como é feito com as equações e expressões analíticas, em duas partes, uma completa em si mesma e a outra insaturada e carente de complementação[39]. Assim, pode-se decompor a sentença

"César conquistou as Gálias"

em "César" e "conquistou as Gálias". A segunda parte é insaturada, ela contém um lugar vazio, e somente quando esse lugar é preenchido com um nome próprio, ou de uma expressão que represente um nome próprio, o sentido completo aparecerá. Aqui, também, denomino de função a referência dessa parte insaturada. Neste caso, o argumento é César.

Vamos agora empreender a extensão [do termo função] na outra direção, a saber, ampliando o domínio dos possíveis argumentos[40]. Não apenas números, mas objetos em geral, são agora admissíveis, e aqui também pessoas devem ser contadas entre os objetos. Os dois valores de verdade já introdu-

38. A palavra *Behauptungssatz* tem sido traduzida tanto por 'sentença assertiva' como 'sentença assertórica'. Contudo, seria interessante distinguir 'sentença assertiva' de 'sentença assertórica'. Uma tradição que se avoluma mais e mais é a de entender por esta última expressão as quatro formas sentenciais da lógica tradicional: SaP, SeP, SiP e SoP (N. do T.).

39. Aqui aparecem pela primeira vez as dicotomias saturado/insaturado e completo/incompleto, para assim poder esclarecer a estrutura interna da sentença em termos de função e argumento. Desse modo, Frege se propõe a analisar a sentença – utilizando as distinções elaboradas na *Begriffsschrift*, § 9 – em um componente que ele denomina de 'função' e um componente (ou componentes) que ele chama de argumento(s) da função, que são objetos ou mesmo funções. É a insaturação de um dos componentes da sentença que torna possível seus elementos se associarem entre si formando uma unidade. Cumpre ainda observar que o par saturado/insaturado se dá não só no plano da expressão, como também no plano do sentido e da referência (N. do T.).

40. Cf. *supra* p. 91 (N. do T.).

zidos são também possíveis valores de uma função. Devemos ir ainda mais adiante e admitir [quaisquer] objetos, sem restrição, como valores de função. Para que se tenha um exemplo disso, consideremos a expressão

"a capital do império alemão".

Ela representa um nome próprio e refere-se a um objeto. Se, agora, nós a decompomos nas partes

"a capital do"

e

"império alemão"

aqui considero a partícula genitiva[41] integrante da primeira parte – vemos que esta primeira parte é insaturada, enquanto que a segunda é completa em si mesma. De acordo com o que disse anteriormente, chamo

"a capital de x"

de a expressão de uma função. Se tomarmos o império alemão como seu argumento, obtemos, como o valor da função, Berlim.

Quando admitimos qualquer objeto sem restrição como argumento ou valor de uma função, surge a questão do que é que chamamos aqui de objeto. Considero impossível uma definição regular [de objeto], já que nos deparamos com algo cuja simplicidade não admite nenhuma análise lógica. Aqui, só se pode assinalar o que se quer dizer. E só se pode dizer sucintamente o seguinte: um objeto é tudo o que não é função, tudo aquilo cuja expressão não contém lugar vazio[42].

41. Em alemão, 'império alemão', enquanto componente da expressão 'a capital do império alemão', ocorre na forma genitiva; porém, decomposta tal expressão, passa a figurar na forma nominativa, enquanto que o equivalente alemão a 'do' permanece no genitivo (N. do T.).

42. Nessa passagem, Frege expõe um importante aspecto de sua teoria do objeto (*Gegenstand*). De início, nos é dito que por sua simplicidade, objeto não pode ser definido.No trecho acima, ele afirma que um objeto é tudo aquilo que não é função (e por conseguinte que não é conceito), mas que pode ocorrer como argumento e valor de uma função. Os objetos são completos, saturados e independentes. Entre os itens que Frege arrola como objeto contamos: as coisas sensorialmente perceptíveis objetivamente existentes fora de nós, os números, o verdadeiro e o falso, os percursos de valores das funções e as extensões dos conceitos (N. do T.).

Uma sentença assertiva não contém lugar vazio, e assim, deve-se considerar que sua referência seja um objeto. Essa referência, porém, é um valor de verdade. Logo, os dois valores de verdade são objetos.

Anteriormente, apresentamos algumas igualdades (*Gleichnungen*)[43] entre percursos de valores, por exemplo,

$$'\varepsilon\left(\varepsilon^2 - 4\varepsilon\right) = '\alpha\left(\alpha \cdot \left[\alpha - 4\right]\right),$$

expressão que se decompõe em "$'\varepsilon(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$" e "$( ) = '\alpha(\alpha \cdot [\alpha - 4])$". Esta última parte necessita de complementação, já que, à esquerda do sinal de igualdade, ela contém um lugar vazio. A primeira parte, "$'\varepsilon(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$", é inteiramente completa em si mesma e refere-se, assim, a um objeto. Os percursos de valores das funções são objetos, enquanto que as funções elas mesmas não o são. Denominamos $'\varepsilon(\varepsilon^2 = 1)$ de percurso de valor, mas poderíamos também designar essa expressão de extensão do conceito *raiz quadrada de 1*[44]. As extensões conceituais são também objetos, embora os conceitos em si mesmos não o sejam.

Depois de ter estendido o domínio do que pode ser tomado como argumento, devemos fazer especificações mais exatas sobre as referências dos sinais já em uso antes desta extensão. Na medida em que se considerem como únicos objetos da aritmética os números inteiros, as letras *a* e *b* em "*a* + *b*" indicam apenas números inteiros, e assim o sinal de adição deve ser definido somente entre os números inteiros. Cada extensão do domínio dos objetos aqui indicados por "*a*" e "*b*" torna necessária uma nova definição do sinal de adição[45]. É uma norma de rigor científico cuidar que nenhuma expressão seja carente de referência, que nunca se calcule com sinais vazios, na crença de que se esteja lidando com objetos. No passado, houve experiências desinteressantes com séries infinitas divergentes[46]. É, assim, necessário estabelecer convenções a partir das quais possamos saber a que se refere, por exemplo,

43. Cf. cap. 5, n. 6 (N. do T.).
44. O original não se encontra em itálico (N. do T.).
45. Cf. cap. 5, n. 28 (N do T.).
46. Os matemáticos dos séculos XVII e XVIII, ao desenvolverem a análise matemática (cf. supra p. 34 nota 74), eram levados antes pela intuição do que por procedimentos rigorosamente formais. Não cabe, pois, estranhar o surgimento de paradoxos no contexto dessa disciplina. Um exemplo clássico é o da série infinita S = 3 – 3 + 3 – 3 + 3 ... Suponhamos, de início, que tal série se agrupe da seguinte maneira S = (3 – 3) + (3 – 3) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0. Suponhamos, agora, que essa mesma série venha a se agrupar desta outra maneira S= 3 + (–3 + 3) + (–3 + 3) +... = 3 + 0 + 0 + 0 +... = 3. A série infinita mencionada diverge, como se diz, na medida em que ora assume o valor 0 e ora assume o valor 3, segundo o modo de agrupar seus termos. O que resulta numa contradição. Essa maneira de operar

"$\odot + 1$"

caso "$\odot$" se refira ao Sol. Como tais convenções são introduzidas, é relativamente irrelevante, o essencial é que elas existam, que "$a + b$" tenha sempre uma referência, quaisquer que sejam os sinais de objetos determinados que possam substituir "a" e "b". No que tange aos conceitos, cumpre exigir que, para cada argumento, eles tenham por valor um valor de verdade; e que, para cada objeto, saiba-se se este cai ou não sob o conceito. Em outras palavras, exigimos dos conceitos que tenham uma delimitação nítida, e se isto não for satisfeito, será impossível estabelecer leis lógicas a seu respeito. Para cada argumento x, tal que "$x + 1$" seja carente de referência, a função $x + 1 = 10$ tampouco teria um valor, e tampouco teria um valor de verdade, de modo que o conceito

"que aumentado de 1 resulta 10"

não teria limites nítidos. Portanto, a exigência da delimitação precisa dos conceitos acarreta a exigência de que as funções, em geral, tenham um valor para cada argumento[47].

Até aqui, consideramos os valores de verdade somente como valores de funções, não como argumentos. Pelo que acabamos de dizer, uma função também deve ter um valor caso ela venha tomar um valor de verdade como argumento. Mas na maioria dos casos, no que concerne os sinais já em uso, este valor é determinado só por vontade de determiná-lo, sem que importe muito o que se determina. Mas, vamos agora considerar algumas funções de especial interesse quando seu argumento é um valor de verdade. Como uma tal função, temos

$$—— x\,,$$

convencionando [a regra de] que o valor dessa função deva ser o verdadeiro se

com séries infinitas não era infreqüente entre os matemáticos de épocas mais recuadas. Daí ter Frege utilizado esse fato como exemplo. Há que se notar porém que com o desenvolvimento das investigações sobre séries infinitas tais impasses foram eliminados (N. do T.).

47. Nesse exemplo, Frege nos diz que para a expressão 'que aumentado de 1 resulta 10' ter um valor de verdade, é necessário tomarmos a função $f(x) = x + 1$ e indagar para que valor real de x, $f(x) = 10$, para assim termos a seguinte equivalência: $f(x) = x + 1$; $f(x) = 10 \leftrightarrow x = 9 \leftrightarrow 9 + 1 = 10$ (N. do T.).

o verdadeiro for tomado como argumento, enquanto que o valor será o falso em todos os demais casos, a saber, quando o argumento for o falso ou quando ele não for um valor de verdade. Segundo o que acabamos de dizer, por exemplo,

$$—— 1+3=4$$

é o verdadeiro; enquanto que tanto

$$—— 1+3=5$$

quanto

$$—— 4$$

são o falso. Essa função tem, pois, como valor o próprio argumento, quando este é um valor de verdade. No passado, eu tinha denominado esse traço horizontal de traço de conteúdo, nome que não mais me parece apropriado. Quero agora chamá-lo simplesmente de o horizontal (*Waagerecht*)[48].

Quando se escreve uma igualdade ou uma desigualdade, digamos, 5 > 4, pensa-se habitualmente que com isso foi também expresso um juízo; em nosso caso, quer-se asserir que 5 é maior que 4. Consoante a concepção que estou aqui apresentando, em "5 > 4" ou "1 + 3 = 5" tem-se apenas expressões de valores de verdade, sem que nada seja asserido[49]. Esta separação entre o julgar e aquilo sobre o qual se julga parece-me indispensável; pois, do contrário, não podería-

48. O sinal '——' foi por Frege introduzido em sua *Begriffsschrift*, § 2 sob o nome de *Inhaltsstrich*, 'traço de conteúdo', para com ele expressar que o conteúdo que se segue é um conteúdo asserível (ou pensamento ou proposição) e não um mero conteúdo não-asserível, como um conceito ou um predicado. Mas, após ter decomposto o conteúdo das expressões em sentido e referência, Frege vem a substituir o nome *Inhaltsstrich* pelo termo *Waagerecht*, 'o [traço] horizontal'. Frege entende que a circunstância de que os conteúdos se dividem em asseríveis e não-asseríveis, implica que se disponha de um sinal que manifeste ese fato. Contudo, cedo esse sinal foi abandonado e se tornou objeto de estipulações das regras do sistema e, assim, a notação fregeana não vingou (N. do T.).

49. O ato de asserir tem por objetivo transformar um pensamento ou um conteúdo asserível (*beurteilbarer Inhalt*) em um juízo que ao ser enunciado se apresenta como uma asserção. 'O objetivo da pesquisa científica é a *verdade*. E *reconhecendo* internamente algo como *verdadeiro*, nós *julgamos*, e enunciando este juízo, fazemos uma asserção.' G. Frege, *Nachgelassene*, p. 2. Sendo assim, uma asserção é um juízo. Nem todo conteúdo, porém, pode ser objeto de asserção. Em sentido estrito, o que cabe ser asserido é um pensamento (*i. e.*, uma proposição ou um conteúdo asserível). Observe-se

mos expressar uma mera suposição, o relato de um caso, sem simultaneamente fazer um juízo sobre se é ou não o caso[50]. Precisamos, pois, de um sinal especial para a asserção. Para esse fim, utilizo um traço vertical (*Senkrecht*) colocado à extrema esquerda do horizontal, tal que, por exemplo, mediante

$$\text{“}\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; 2+3=5\text{”}$$

assere-se que 2 + 3 é igual a 5. Desse modo, não estamos apenas escrevendo um valor de verdade, como em

$$\text{“}2+3=5\text{”},$$

mas simultaneamente estamos dizendo também que ele é o verdadeiro[51].

A próxima função mais simples pode ser aquela cujo valor é o falso para argumentos para os quais o valor de $—\, x$ é o verdadeiro, e cujo valor é o verdadeiro para argumentos para os quais o valor de $—\, x$ é o falso. Simbolizo-a assim

$$-\!\!\top\!\!-\; x,$$

e denomino o pequeno traço vertical de traço de negação. Concebo essa função como uma função cujo argumento é $—\, x$:

$$(-\!\!\top\!\!-\; x) = (-\!\!\top\!\!-\; (—\, x)),$$

que, se um pensamento expresso por uma sentença for objeto de uma asserção, é lícito dizer que esta sentença foi asserida, e assim reconhecida como verdadeira (N. do T.).

50. Um juízo (*Urteil*) é, como Frege chama, um pensamento asserido, sendo assim verdadeiro ou falso. Um pensamento poderá ser ou não asserido. Isso porque um pensamento nada mais é do que um conteúdo asserível. Quando um pensamento, um conteúdo asserível, vier a ser asserido, temos o que Frege denomina de 'juízo'. Portanto, um pensamento (ou um conteúdo asserível) só se torna um juízo pela asserção, isto é, pelo reconhecimento de sua verdade (N. do T.).

51. O traço de juízo não pode ser usado para formar uma expressão funcional, pois ele não serve, conjuntamente com outros sinais, para designar um objeto. “$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; 2 + 3 = 5$” nada designa; ele assere alguma coisa.

onde os dois traços horizontais se fundiram em um único. Mas tem-se ainda

$$(-\!\!\!\top\!\!\!-\,(-\!\!\!\top\!\!\!-\,x) = (-\!\!\!\top\!\!\!-\,x),$$

já que o valor de $-\!\!-\, x$ é sempre um valor de verdade. Assim, em "$-\!\!-\, x$", considero as duas partes do traço à direita e à esquerda do traço de negação como [traços] horizontais, no sentido específico que dei anteriormente a essa palavra. Por exemplo,

$$\text{“}\ -\!\!\!-\!\!\!\top\!\!\!-\!\!\!-\ 2^2 = 5\text{”}$$

refere-se ao verdadeiro, e assim podemos acrescentar o traço de juízo[52].

$$\text{“}\vdash\!\!\!\top\!\!\!-\ 2^2 = 5\text{”};$$

com o qual asserimos que $2^2 = 5$ não é o verdadeiro, ou que 2^2 não é igual a 5. Por fim, note-se que

$$-\!\!\!-\!\!\!\top\!\!\!-\!\!\!-\, 2$$

52. O termo por Frege empregado para designar o sinal '|' é *Urteilsstrich*, que literalmente significa 'traço de juízo'. No presente artigo, ele não mais se utiliza dessa designação, mas da palavra *Senkrecht*, 'o [traço] vertical'. Este sinal associado ao traço de conteúdo '——' dá origem ao sinal '⊢——', que aparece pela primeira vez em sua *Begriffsschrift*, §2, e para o qual Frege nunca reservou um nome especial. Mais tarde, Whitehead e Russell vieram a denominar o símbolo '⊢——' de 'sinal de asserção', designação pela qual esse sinal é hoje universalmente conhecido, cf. *Principia Mathematica*, I, p. 8. O sinal de asserção serve apenas para indicar que o conteúdo que a ele se segue (*i. e.*, um conteúdo asserível ou pensamento ou proposição) foi asserido (ou é uma asserção ou um juízo). Por outro lado, a ausência do sinal de asserção indica que esse conteúdo não foi asserido. Ao contrário do de outros sinais com o auxílio dos quais é dado construir expressões que designam funções, com o traço de juízo isto não se dá, já que ele nada designa mas apenas manifesta que uma expressão foi asserida (cf. supra nota 51). Por fim, cumpre notar que o sinal de asserção é, para Frege, parte da linguagem-objeto de seu sistema, enquanto que na lógica atual, o sinal de asserção é utilizado em sentido sintático, na metalinguagem, para indicar a dedutibilidade entre sentenças, seja esta hipotética (como, em A ⊢—— B) seja categórica (como, em ⊢—— B, ao expressar que o conteúdo que a ele se segue é um teorema) N. do T.

é o verdadeiro, já que — 2 é o falso:

$$\vdash\!\!\!\!\top\!\!\!-\, 2;$$

isto é, 2 não é o verdadeiro.

Meu modo de representar a generalidade[53] pode ser melhor apreciado mediante um exemplo. Suponhamos que se tenha que expressar que todo objeto é igual a si mesmo. Em

$$x = x$$

temos uma função cujo argumento é indicado por "*x*". Temos agora de dizer que o valor dessa função é sempre o verdadeiro, qualquer que seja o argumento. Expresso, pois, com

$$-\!\!\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\!-\, f(\alpha)$$

o verdadeiro, quando a função *f*(*x*) tem como valor sempre o verdadeiro, qualquer que seja seu argumento; em todos os demais casos,

$$-\!\!\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\!-\, f(\alpha)$$

deverá referir-se ao falso[54]. No que tange à função $x = x$, temos o primeiro caso. Desse modo,

$$-\!\!\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!\!-\, \alpha = \alpha$$

53. De modo geral, os quantificadores são expressões insaturadas, e como tal carecendo de serem saturadas por expressões predicativas de primeira ordem. Em outros termos, tratam-se de propriedades de segunda ordem que só são saturadas por conceitos de primeira ordem (N. do T.).

54. O conceito de quantificação tem dupla origem. Uma remonta a Aristóteles (*An. Pr.*, I, 1); outra, aparece com Frege em sua *Conceitografia*, § 11, e está sendo aqui reexposta. Quanto aos termos 'quantificador' e 'quantificação' foram introduzidos por C. S. Peirce, *Collect. Pap.*, III, p. 232. Frege, contudo, deles não se utiliza (N. do T.).

é o verdadeiro; e isto escrevemos assim:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Os traços horizontais à direita e à esquerda da concavidade devem ser considerados como horizontais, em nosso sentido. Em vez de "$\mathfrak{a}$", qualquer outra letra gótica poderia ter sido escolhida, exceto aquelas que devem servir como letras de funções, como *f* e *F*.

Essa espécie de notação dá a possibilidade de negar a generalidade, como em

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

Ou seja, $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ é o falso, já que nem todo argumento torna o valor da função $x^2 = 1$ o verdadeiro. Assim, para o argumento 2, obtemos $2^2 = 1$, isto é, o falso. Agora, se $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ é o falso, então $\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ é o verdadeiro, de acordo com o que foi convencionado anteriormente a respeito do traço de negação. Desse modo, temos

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1,$$

isto é, "nem todo objeto é uma raiz quadrada de 1", ou "há objetos que não são raízes quadradas de 1".

Há também como expressar que há raízes quadradas de 1? Certamente. Basta para tanto tomar em lugar da função $x^2 = 1$, a função

$$-\!\top\!-\ x^2 = 1.$$

A partir de

$$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ -\!\top\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

obtemos, por fusão das horizontais,

$$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

que se refere ao falso, já que nem todo argumento torna o valor da função

$$-\!\!\top\!\!-\ x^2 = 1$$

o verdadeiro. Por exemplo,

$$-\!\!\top\!\!-\ 1^2 = 1$$

é falso, uma vez que $1^2 = 1$ é o verdadeiro. Mas, já que

$$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

é o falso, então

$$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

é o verdadeiro:

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

o que pode ser dito "nem todo argumento torna o. valor da função

$$-\!\!\top\!\!-\ x^2 = 1$$

o verdadeiro", ou "nem todo argumento torna o valor da função $x^2 = 1$ o falso", ou "há pelo menos uma raiz quadrada de 1".

A seguir apresentaremos ainda alguns exemplos mediante símbolos e palavras:

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 \geqq 0,$$

[que quer dizer] existe pelo menos um número positivo;

$$\vdash\!\top\overset{\alpha}{\smile}\!\top\ \alpha^2 < 0,$$

ou existe pelo menos um número negativo; e ainda

$$\vdash\!\top\overset{\alpha}{\smile}\!\top\ \alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha = 0,$$

existe pelo menos uma raiz da equação

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

A partir disto, pode-se ver como se expressam as sentenças existenciais mais importantes. Se, pela letra funcional *f*, indicamos indefinidamente um conceito, temos então em

$$\top\overset{\alpha}{\smile}\!\top f(\alpha)$$

a forma comum de nossos últimos exemplos, se não levarmos em conta o sinal de juízo[55]. As expressões

$$\top\overset{\alpha}{\smile}\!\top\ \alpha^2 = 1, \qquad \top\overset{\alpha}{\smile}\!\top\ \alpha^2 \geqq 0,$$

$$\top\overset{\alpha}{\smile}\!\top\ \alpha^2 < 0, \qquad \top\overset{\alpha}{\smile}\!\top\ \alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha = 0,$$

surgem a partir desta forma de maneira similar à qual, por exemplo, de x^2 sur-

55. O que há de comum é a ocorrência de um traço de negação antes e depois da concavidade, isto é, do quantificador universal. Tal é a maneira pela qual Frege veio a introduzir o quantificador existencial e que, posteriormente, foi anotado, por exemplo, assim: $(x)\,f(x) \leftrightarrow \sim (x) \sim f(x)$. N. do T.

gem "1^2", "2^2", "3^2". Do mesmo modo que em x^2 temos uma função cujo argumento é indicado por "x", assim também concebo

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top f(\mathfrak{a})$$

como a expressão de uma função cujo argumento é indicado por "f". Tal função é, está claro, essencialmente diferente daquelas até então consideradas, pois somente uma função pode ser aqui tomada como seu argumento. Do mesmo modo que as funções são essencialmente diferentes dos objetos, assim também as funções cujos argumentos são e devem ser funções são essencialmente diferentes das funções cujos argumentos são objetos e nada mais podem ser. A estas [últimas] denomino funções de primeiro nível, e às outras funções [cujos argumentos são funções] de segundo nível. Do mesmo modo, distingo conceitos de primeiro e segundo nível[56]. De fato, funções de segundo nível há muito têm sido usadas na Análise, por exemplo nas integrais definidas, na medida em que se considere a função a ser integrada como o argumento[57].

Acrescentarei ainda algo mais sobre as funções de dois argumentos[58]. Obtivemos a expressão de uma função ao decompor o sinal complexo de um objeto em uma parte saturada e outra insaturada. Podemos decompor, por exemplo, o sinal de o verdadeiro

"$3 > 2$"

em "3" e "$x > 2$". Podemos ainda decompor a parte insaturada "$x > 2$" em "2" e "$x > y$", onde "y" permite reconhecer o lugar vazio que anteriormente fora preenchido por "2". Em

56. Cf. meus *Fundamentos da Aritmética,* Breslau, 1884, fim do § 53, onde usei o termo "segunda ordem" (*zweiter Ordnung*), em vez de "segundo nível" (*zweiter Stufe*). A prova ontológica da existência de Deus padece da falácia de tratar a existência como um conceito de primeiro nível.

57. O que Frege acima acaba de dizer é regulado, assim parece, pelo teorema de mudança de variável, como costuma ser chamado (N. do T.).

58. Frege passa agora ao estudo do que correntemente se chama, em lógica, de 'relação', especificamente das relações diádicas. Um pouco mais abaixo ele classifica as funções em conceitos (funções de um argumento) e relações (funções de mais de um argumento). Portanto, conceitos e relações são casos particulares de funções na terminologia fregeana (N. do T.).

$$x > y$$

temos uma função com dois argumentos, um dos quais indicado por "x" e o outro por "y", e

$$3 > 2$$

é o valor dessa função para os argumentos 3 e 2. Temos aqui uma função cujo valor é sempre um valor de verdade. As funções de um só argumento denominamos de conceitos; as funções com dois argumentos denominamos de relações. Temos também relações, por exemplo, em

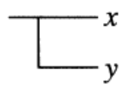
$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 > 9$$

enquanto que a função

$$x^2 + y^2$$

tem números como valores. Assim sendo, não a denominaremos de relação.

Pode-se agora introduzir uma função não peculiar à aritmética[59]. O valor da função



é o falso, caso se tome o verdadeiro como o argumento y, e simultaneamente um objeto que não é o verdadeiro como o argumento x; em todos os demais casos, o valor dessa função será o verdadeiro[60]. O traço horizontal inferior e as duas par-

59. De fato, a função 'se y, então x' que será agora introduzida não é peculiar à aritmética mas ao cálculo proposicional (N. do T.).

60. Frege aqui define a função lógica que mais tarde Bertrand Russell (1903) veio a designar de 'implicação material'. Contudo, foi Filão de Mégara (c. 300 a.C.) quem introduziu essa noção, que só veio a ressurgir na modernidade na *Begriffsschrift*, § 5 de Frege, e logo a seguir foi retomada por C. S. Peirce, 'On the Algebra of Logic', *Amer. J. Math.*, 7 (1885), especialmente pp. 186-187 (N. do T.).

tes em que o traço horizontal superior é dividida pelo traço vertical devem ser considerados como horizontais. Por conseguinte, pode-se sempre tomar — x e — y como argumentos de nossa função, isto é, como valores de verdade.

Entre as funções de um argumento, distinguimos as de primeiro e as de segundo nível. Aqui é possível vislumbrar uma maior variedade de casos. Uma função de dois argumentos pode ser, quanto a estes, do mesmo nível ou de níveis distintos – teremos assim funções de nível igual ou função de nível desigual. As funções que até aqui consideramos eram todas de nível igual. Uma função de nível desigual é, por exemplo, o quociente diferencial, se tomamos como argumentos, de um lado, a função a ser diferenciada, e, de outro, o argumento para o qual se diferencia[61]. Um outro exemplo é a integral definida, desde que se tomem como argumentos a função a ser integrada e o limite superior[62]. As funções de nível igual podem ainda, por sua vez, ser divididas em funções de primeiro e de segundo nível. Um exemplo de função de segundo nível é

$$F\left(f\left[1\right]\right),$$

onde "F" e "f" indicam os argumentos.

Entre as funções de segundo nível de um argumento, cumpre distinguir conforme o argumento possa ser uma função de um argumento ou uma função de dois argumentos. Pois, uma função de um argumento é essencialmente distinta de uma função de dois argumentos, já que uma não pode ocorrer como

61. Tal é o caso, por exemplo, da função

$$\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

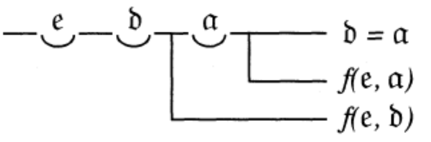
em que cos(x/2) é o argumento funcional e x o argumento para o qual se diferencia (N. do T.).

62. Um exemplo é a função que calcula a integral definida de zero a b, onde b é uma variável de uma função arbitrária f. Em símbolos

$$f \xrightarrow{F} \int_0^b f\left(x\right)dx.$$

Assim, a função F, possui dois argumentos $F(f,b)$ N. do T.

argumento onde a outra pode ocorrer. Algumas funções de segundo nível de um argumento exigem que este [argumento] seja uma função de um argumento, outras exigem que ele seja uma função de dois argumentos, e essas duas classes de funções são radicalmente distintas. A função



é um exemplo de uma função de segundo nível de um argumento, que exige como argumento uma função de dois argumentos. A letra *f* indica aqui o argumento, e os dois lugares separados pela vírgula, dentro dos parênteses que se seguem a *f*, evidenciam que *f* representa uma função de dois argumentos[63].

Para funções de dois argumentos, a variedade de casos é ainda maior.

Se fizermos agora uma retrospectiva do desenvolvimento da aritmética, apercebemo-nos de seu avanço etapa por etapa. Inicialmente[64], calculava-se com números individuais, com o 1, o 3 etc. E

$$2+3=5 \quad \text{e} \quad 2\cdot 3=6$$

são teoremas desse gênero. A seguir[65], obtiveram-se leis mais gerais, que valem para todos os números. O que a isto corresponde, no plano notacional, é a transição para o cálculo literal. Em

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

temos um teorema desse gênero. Isto estabelecido, chegou-se à consideração de funções especiais, mas sem ainda empregar esta palavra em seu sentido mate-

63. Cf. sobre essa função, *Grundgesetze der Arithmetik*, I, § 23 (N. do T.).
64. Nesta etapa inicial da aritmética só se opera com as constantes numéricas: 1, 2, 3 etc. E assim seus teoremas só podem ser expressos com a máxima especificidade (N. do T.).
65. Nesta nova etapa, pela utilização de letras ou variáveis, já se consegue expressar um teorema da aritmética em toda a sua generalidade (N. do T.).

mático e sem ainda ter apreendido a sua referência. A esta[66] se segue uma etapa mais avançada, que foi o conhecimento das leis gerais das funções e a criação do termo técnico "função"[67]. A esta etapa, corresponde no plano notacional a introdução de letras como *f* e *F*, que indicam funções de maneira indefinida. Em

$$\frac{df(x)\cdot F(x)}{dx} = F(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} + f(x)\cdot\frac{dF(x)}{dx}$$

temos um teorema desse gênero. A essa altura, tinham-se algumas funções de segundo nível, sem que se tivesse contudo depreendido o que chamamos de função de segundo nível. Ao compreender isto, deu-se o último passo[68]. Poder-se-ia pensar que se continuaria assim indefinidamente. Mas, provavelmente, este último passo já não dispõe de tantas conseqüências como os anteriores, pois, com os progressos obtidos, em lugar de funções de segundo nível pode-se lidar com funções de primeiro nível, como será mostrado em outro lugar[69]. Não há, porém, como eliminar a diferença entre funções de primeiro e de segundo nível, já que tal diferença não foi feita arbitrariamente, mas fundamentada na natureza mesma das coisas.

Pode-se também tratar uma função de dois argumentos como uma função de um único argumento complexo; apesar disto, a distinção entre funções de um argumento e funções de dois argumentos permanece em sua plena vigência.

66. De início, é a fase em que os matemáticos dispunham de fórmulas mediante as quais calculavam comprimentos, ângulos, áreas, volumes etc. sem associar este fato ao nome de função. É também neste momento que se chega à noção intuitiva de função e se fixa esse nome; também se opera com variáveis que indicam funções e já se dispunha de funções de segundo nível (aqueles cujos argumentos são também funções). No século XVIII já se fala de função logarítmica, exponencial, trigonométrica, hiperbólica e outras mais. Mas ainda não se atingira o patamar de pensar esta noção de forma abstrata e generalizada (N. do T.).
67. A palavra 'função' foi introduzida por Leibniz (1673) para designar uma quantidade que varia de um ponto a outro de uma curva. Jean Bernoulli (1698) veio mais tarde a adotar a expressão leibniziana 'função de x'. É no início do século XVIII que esse termo se difunde e o conceito de função se torna indispensável (N. do T.).
68. Tal é o que Frege veio a realizar ao explicitar e generalizar as noções de função, valor e argumento; e ainda classificar as funções quanto ao número (ou ordem) e quanto ao número de argumentos envolvidos (N. do T.).
69. Cf. *Grundgesetze der Arithmetik*, I, §§ 25; 34-37 (N. do T.).

6

SOBRE O CONCEITO E O OBJETO (1892)

Benno Kerry, numa série de artigos[1] sobre a intuição e sua elaboração psíquica publicada nesta revista, referiu-se diversas vezes aos meus *Fundamentos da Aritmética* e a outros de meus escritos, em parte concordando, e em parte criticando-os. Só posso ficar satisfeito com isso, e creio que o melhor modo de manifestar meu apreço é aceitar a discussão dos tópicos que ele critica. Isso me parece tanto mais necessário quanto suas objeções se apoiam, pelo menos em parte, numa má compreensão, que poderia ser partilhada por outros, do que digo a respeito do conceito. E além disso, o assunto é suficientemente importante e difícil para, mesmo prescindindo deste motivo especial, ser tratado mais detidamente do que me pareceu conveniente nos meus *Fundamentos.*

A palavra "conceito" é empregada de diversos modos; por vezes, em sentido psicológico, por vezes, em sentido lógico e, por vezes talvez, numa confusa mistura de ambos. Essa liberdade, porém, se vê naturalmente limitada pela exigência de que, uma vez adotado um uso para essa palavra, este deva ser mantido. O que decidi foi ater-me a um uso puramente lógico. A questão de se

Publicado pela primeira vez sob o título de 'Über Begriff und Gegenstand', em *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16 (1892), pp. 192-205. Republicado em G. Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, ed. G. Patzig, Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht, 1966, pp. 66-80.

1. B. Kerry, 'Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung', *Vierteljarsschrift für Wissenschaftlich Philosophie*, IX (1885), 433-493; X (1886), 419-467; XI (1887), 53-116, 249-307; XIII (1889), 71-124, 392-419; XIV (1890), 317-353; XV (1891), 127-167 (N. do T.).

este ou aquele uso é o mais apropriado é uma questão que gostaria de deixar de lado, como sendo de menor importância. Facilmente se chega a um acordo sobre uma expressão, quando se tiver reconhecido que existe algo que mereça receber uma denominação especial.

Parece-me que a má compreensão de Kerry resulta de ter ele involuntariamente confundido o seu próprio uso da palavra "conceito" com o meu. Disso resultam facilmente contradições das quais o meu uso não é responsável.

Kerry impugna o que ele denomina de minha definição de "conceito". Antes de mais nada, gostaria de observar que minha explicação não deve ser tomada como uma definição propriamente dita. Não se pode exigir que tudo seja definido, da mesma maneira que não se pode exigir do químico que decomponha todas as substâncias. O que é simples não pode ser decomposto, e o que é logicamente simples[2] não pode ter uma definição propriamente dita. O logicamente simples não nos é dado logo de início, tal como ocorre também com a maioria dos elementos químicos. Pelo contrário, este só é alcançado por meio do trabalho científico. Ao se descobrir algo que é simples, ou que, pelo menos por enquanto, deva ser tomado como simples, deve-se forjar-lhe uma denominação, já que a linguagem não contém originalmente uma expressão que lhe corresponda exatamente. Mas não é possível recorrer a uma definição para introduzir o nome do que é logicamente simples. Para isto, só resta levar o leitor ou o ouvinte, por meio de sugestões, a entender o que se quer dizer com essa palavra.

Kerry deseja mostrar que a distinção entre conceito e objeto não é absoluta. "Numa passagem anterior, diz ele, expressamos a opinião de que a relação entre conteúdo de um conceito e objeto de um conceito é, de certo modo, uma relação peculiar e irredutível; disto, porém, não decorre que as propriedades: ser um conceito e ser um objeto, excluam-se mutuamente. Esta opinião é tão insustentável quanto, do caráter irredutível da relação entre pai e filho, querer concluir que não se pode ser simultaneamente pai e filho (embora, é claro, não se pode ser pai daquele de quem se é filho)."

Fixemo-nos nessa comparação. Se houvesse ou tivesse havido entes que, sendo pais, não pudessem ser filhos, estes entes seriam, obviamente, de uma espécie diferente da dos homens que são filhos. Algo semelhante acontece aqui. O conceito – tal como entendo esta palavra – é predicativo[3]. Por outro lado, um nome de objeto, um nome próprio, não pode absolutamente ser usado

2. Para Frege, o logicamente simples abrange, pelo menos, as funções, os conceitos e os objetos. Em decorrência disto, função, conceito e objeto são indefiníveis (N. do T.).

3. A saber, é a referência de um predicado gramatical.

como um predicado gramatical. Isto naturalmente necessita de elucidação, pois, de outra forma, poderia parecer falso. Não se pode, de uma coisa, dizer que é Alexandre Magno, ou que é o número quatro, ou que é o planeta Vênus[4], como se diz que uma coisa é verde ou que é um mamífero?[5] Caso assim se pense, não ficam devidamente distinguidos os diversos modos de se usar a palavra "é"[6]. Nos dois últimos exemplos, esta palavra serve de cópula, como um mero sinal verbal (*Formwort*) da predicação[7]. Quando assim utilizada, ela [a palavra 'é'] pode, às vezes, ser substituída pelo simples sufixo pessoal do verbo. Compare-se, por exemplo, "esta folha é verde" com "esta folha verdeja". Aqui estamos dizendo [em ambos os exemplos] que algo cai sob um conceito, e que o predicado gramatical se refere a esse conceito. Nos três primeiros exemplos, pelo contrário, o "é" tem a função do sinal aritmético de igualdade; ele exprime uma identidade[8]. Na sentença "a estrela matutina é Vênus", temos

4. Frege arrola de início três exemplos em que um objeto (ou seu nome próprio) é "atribuído" a um sujeito – 'Este homem é Alexandre Magno', '2 + 2 é 4' e 'A estrela matutina é Vênus'. Ocorre, porém, que aqui o 'é' tem a função de igualdade que une dois nomes próprios. Tal é o que indica sua reversibilidade, por exemplo, 'Alexandre Magno é este homem'. Ele é assim parte essencial do predicado (N. do T.).
5. Estes dois últimos exemplos – *i. e*, 'Esta folha é verde' e 'O cavalo é um mamífero' - são sentenças atributivas em que um predicado é atribuído a um sujeito. Aqui é dito que esta folha cai sob o conceito *verde* ou que o cavalo cai sob o conceito *mamífero*. Não temos assim dois nomes próprios, em sentido fregeano. Tal relação não é reversível. E o verbo 'é' não é uma igualdade, nem uma parte essencial do predicado, mas o que a lógica latina designa pela palavra *copula* (N. do T.).
6. Frege aqui acena para o fato de o 'é' ter, pelo menos, duas funções: i) a de igualdade; e ii) a predicativa. Na verdade, porém, Frege reconhece quatro sentidos para o vocábulo é: i) o de igualdade (ou identidade) – como 'Vênus é a estrela matutina'; ii) o de subsunção (ou predicativo) – como 'Vênus é um planeta'; iii) o de subordinação (ou inclusão. implicação genérica) – como 'O homem é vertebrado'; e finalmente iv) o de existência – como 'Deus é' (cf. cap. 9, n. 2). Os três primeiros casos constituem distintas funções exercidas pelo 'é' cuja relevância levou os lógicos a cunharem nomes e símbolos especiais. Contudo, o quarto caso se trata – no entender de Frege – de um equívoco, de um uso espúrio ou de um abuso da linguagem corrente que cumpre denunciar e expurgar (N. do T).
7. Quando na acepção de cópula, o 'é' pode ser, sem prejuízo da clareza, eliminado, já que sua única função é indicar a insaturação do predicado. Assim, 'esta folha é verde' pode ser substituída por 'esta folha verdeja'. Com isso a cópula, no entender de Frege, é parte intrínseca e constitutiva do próprio predicado sendo um mero indicativo ou sinal verbal (*Formwort*) da incompletude ou insaturação do predicado. Em outros termos, a insaturação do predicado da sentença acima pode ser indicada por '... verdeja' ou 'é verde'. O que não se dá com os sinais que denotam igualdade, inclusão e pertinência, que não são descartáveis e têm que ser explicitamente enunciados (N. do T.).
8. Uso a palavra "igual" e o sinal "=" no sentido de "o mesmo que", "não outro senão", "idêntico a". Cf. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Leipzig, 1890), vol. 1, § 1. No entanto, Schröder deve ser criticado pelo fato de não distinguir duas relações fundamentalmente diferentes: a de cair um objeto sob um conceito e a de estar um conceito subordinado a outro conceito. Também se prestam a objeções suas observações sobre a raiz quadrada inteira (*Vollwurzel*). O sinal € de Schröder não representa apenas a cópula. [Schröder chama o sinal €, um sinal construído a partir dos sinais (e =, de *Subsumtionszeichen*, 'sinal de subsunção', e entende que a expressão '*a* € *b*' significa "*a* está contido, embora não necessariamente como parte própria, em *b*". *Vorlesungen*, I, pp. 132-134 (N. do T.).]

dois nomes próprios[9], "estrela matutina" e "Vênus", para o mesmo objeto. Na sentença "a estrela matutina é um planeta", temos um nome próprio, "a estrela matutina", e um termo conceitual, "um planeta". Lingüisticamente, nada mais ocorreu do que "Vênus" ter sido substituído por "um planeta"; mas, conteudisticamente, a relação tornou-se completamente distinta. Uma identidade é reversível; mas o cair um objeto sob um conceito não é uma relação reversível. O "é", na sentença "a estrela matutina é Vênus", não é, obviamente, a simples cópula; conteudisticamente, o "é" é aqui uma parte essencial do predicado, e portanto a palavra "Vênus" não constitui por si só a totalidade do predicado[10]. Poder-se-ia também dizer "a estrela matutina não é outra coisa senão Vênus", e o que estava implícito na simples palavra "é" está agora decomposto em cinco palavras separadas, e o "é" de "não é outra coisa senão" é agora simplesmente copulativo. O que aqui se predicou não é, desse modo, *Vênus*, mas *não é outra coisa senão Vênus*. Essas palavras referem-se a um conceito, sob o qual só cai por certo um único objeto. Mas tal conceito sempre deve ser distinguido do objeto[11].Temos aqui uma palavra, "Vênus", que nunca poderá ser propriamente um predicado, ainda que possa vir a fazer parte de um predicado. A referência[12] dessa palavra [Vênus] nunca pode ser um conceito, mas somente um objeto. Que ocorra algo dessa espécie, Kerry não o contestaria. Com isso, porém, teríamos admitido uma distinção que é muito importante de se reconhecer, entre o que só pode ocorrer como um objeto e todo o resto. E essa distinção não desapareceria, mesmo que fosse verdade, como o pensa Kerry, que houvesse conceitos também capazes de ser objetos.

Existem, com efeito, situações que parecem corroborar essa opinião. Eu mesmo já observei (*Fundamentos*, § 53, *ad fin.*) que um conceito pode cair sob um conceito superior, o que não deve ser confundido com a subordinação de um conceito a outro conceito. Embora Kerry não mencione esse fato, ele dá o seguinte exemplo: "o conceito 'cavalo' é um conceito de fácil apreensão", e entende que o conceito "cavalo" é um objeto, e de fato um dos objetos que caem sob o conceito "conceito de fácil apreensão". Perfeito! As três palavras "o conceito 'cavalo'" designam um objeto, mas por isso mesmo elas não designam um

9. Como se vê, Frege aqui se utiliza da expressão *Eigenname*, 'nome próprio', em acepção mais ampla que a usual. Cf. mais adiante cap. 7, nota 11, (N. do T.).
10. Cf. meus *Fundamentos*, § 66, nota.
11. Cf. meus *Fundamentos*, § 51.
12. Cf. meu artigo "Sobre o Sentido e a Referência".

conceito, na acepção em que uso essa palavra. Isto está inteiramente de acordo com o critério que dei de que o artigo definido singular sempre indica um objeto, enquanto que o artigo indefinido acompanha um termo conceitual[13].

Kerry sustenta, é verdade, que nenhum princípio lógico pode basear-se em distinções lingüísticas; mas, quando se visa a estabelecer tais princípios, não se pode evitar de proceder como o faço; pois sem a linguagem, não nos podemos entender um ao outro e, em última instância, temos de confiar em que os outros compreendam as palavras, as formas e as construções sentenciais, no essencial, identicamente a nós mesmos. Conforme disse anteriormente, eu não pretendia dar uma definição, mas apenas sugestões, e para isso fiz apelo à intuição lingüística dos que falam o alemão. Cabe agora pôr em destaque quão bem a distinção lingüística concorda com a distinção conteudística. Quanto ao artigo indefinido, não se observa nenhuma exceção a nossa regra, a não ser em fórmulas arcaicas como "*ein edler Rath*" ['um honrado conselheiro']. A questão não é tão simples no caso do artigo definido, especialmente no plural; mas meu critério não diz respeito a este caso. No singular, tanto quanto posso ver, o tema só se afigura duvidoso quando o singular está em lugar do plural, como nas sentenças: "o turco sitiou Viena", "o cavalo é um animal quadrúpede". A excepcionalidade desses casos, porém, é tão facilmente reconhecível que o valor de nossa regra não fica prejudicado por sua existência. É evidente que, na primeira sentença, "o turco" é o nome próprio de um povo. Quanto à segunda sentença, é melhor considerá-la como expressão de um juízo universal, tal como: "Todos os cavalos são animais quadrúpedes" ou "Todos os cavalos bem constituídos são animais quadrúpedes", mas estes últimos casos serão discutidos mais adiante[14]. Pois bem, quando Kerry considera

13. *Fundamentos*, § 51; § 66, nota; § 68, nota da p. 80 [da edição alemã].

14. Atualmente, ao que parece, está-se propenso a superestimar o alcance da afirmação de que diferentes expressões lingüísticas nunca são completamente equivalentes, e de que uma palavra nunca pode ser traduzida com precisão para outra língua. Poder-se-ia, talvez, ir ainda mais longe e dizer que nem sequer todos os homens que compartilham de uma mesma linguagem apreendem a mesma palavra de modo idêntico. Não investigarei o que nessas sentenças há de verdade, mas tão somente enfatizarei que, freqüentemente, expressões distintas têm algo em comum, a que denomino sentido, e no caso das sentenças, pensamento; em outros termos, não se deve desconhecer que o mesmo sentido, o mesmo pensamento, podem ser expressos de várias maneiras. Assim, a diferença não está no sentido, mas apenas na apreensão, na nuança, no matiz do sentido, e estes são irrelevantes para a lógica. É possível que uma sentença não dê mais nem menos informação do que outra; e, apesar de toda a multiplicidade das línguas, a humanidade possui um tesouro comum de pensamentos. Se toda transformação da expressão fosse proibida, sob a alegação de que com isso também mudaria o conteú-

meu critério inadequado – ao dizer que, na sentença "O conceito de que falo agora é um conceito sob o qual cai um único indivíduo", o nome constituído das seis primeiras palavras refere-se, seguramente, a um conceito –, ele não está tomando a palavra "conceito" em meu sentido, e a contradição não se origina do que eu estabeleci. Mas ninguém pode exigir que o meu modo de expressão deva corresponder ao de Kerry.

Não podemos deixar de reconhecer que estamos diante de um obstáculo lingüístico obviamente inevitável, quando afirmamos que o conceito *cavalo* não é um conceito[15], enquanto que a cidade de Berlim, por exemplo, é uma cidade, ou o vulcão Vesúvio é um vulcão. A linguagem acha-se aqui numa posição constrangedora que justifica o afastamento do uso corrente. A peculiaridade deste caso é indicada pelo próprio Kerry, ao introduzir aspas na palavra "cavalo", para o mesmo objetivo emprego letras itálicas. Não havia nenhuma razão para destacar da mesma maneira as palavras "Berlim" e "Vesúvio". Nas investigações lógicas, necessita-se freqüentemente asserir algo de um conceito, e assim revestir o conceito da forma lingüística usual para tais enunciados, de modo que o que é dito do conceito seja o conteúdo do predicado gramatical. Conseqüentemente, esperar-se-ia encontrar o conceito como referência do sujeito gramatical. Mas o conceito enquanto tal, por sua natureza predicativa, não pode desempenhar esse papel; para que isto se dê, ele antes deve ser convertido num objeto ou, falando mais precisamente, deve ser representado por um objeto[16], objeto este que designamos pela anteposição das palavras "o conceito", como por exemplo em

"O conceito *homem* não é vazio".

Aqui, as três primeiras palavras devem ser consideradas um nome próprio[17], que não pode ser usado como predicado, assim como não o podem "Berlim" ou "Vesúvio". Quando dizemos "Jesus cai sob o conceito *homem*", o predicado (abstraindo-se a cópula) é[18]

do, paralisar-se-ia simplesmente a lógica; pois, sem que se tente redescobrir o pensamento nas suas múltiplas vestimentas, a tarefa da lógica é de todo insolúvel. Desse modo, toda definição teria de ser rejeitada como falsa.

15. Algo semelhante ocorre quando, no que se relaciona à sentença "Esta rosa é vermelha", dizemos: o predicado gramatical "é vermelha" pertence ao sujeito "esta rosa". Aqui, as palavras "o predicado gramatical 'é vermelha'" não são um predicado gramatical, mas um sujeito. Pelo próprio ato de chamar [o predicado] de predicado, nós lhe tiramos essa propriedade.
16. Cf. meus *Fundamentos*, p. x.
17. Chamo de nome próprio todo sinal que designe um objeto.
18. Envolvendo a cópula o predicado seria '... cai sob o conceito *homem*' ou 'x cai sob o conceito *homem*' (N. do T.).

"cai sob o conceito *homem*",

e isto significa o mesmo que

"um homem".

Mas, a combinação de palavras

"o conceito *homem*"

constitui apenas uma parte do predicado.

Alguém poderia objetar, contra a natureza predicativa do conceito, que se pode falar de conceito sujeito (*Subjectsbegriff*). Porém, mesmo neste caso, como por exemplo, na sentença

"Todos os mamíferos têm sangue vermelho",

há que se reconhecer a natureza predicativa[19] do conceito; pois em lugar desta [sentença] poder-se-ia dizer

"O que é mamífero tem sangue vermelho",

ou então

"Se algo é um mamífero, então tem sangue vermelho" [20].

Quando escrevi meus *Fundamentos da Aritmética*, ainda não havia feito a distinção entre sentido e referência[21], e por isso reunia sob a expressão "conteúdo asserível"[22] o que agora distingo e designo pelas palavras "pensamen-

19. O que denomino aqui de natureza predicativa do conceito é apenas um caso especial da necessidade de complementação ou insaturação, que, em meu artigo *Função e Conceito*, apresentei como uma característica essencial da função. Aí não se pôde evitar a expressão "a função $f(x)$", embora igualmente surgisse a dificuldade de que a referência dessas palavras não é uma função.

20. Ou ainda 'se x é mamífero, então x tem sangue vermelho', em que fica patente a natureza predicativa tanto do antecedente como do conseqüente (N. do T.).

21. Cf. meu ensaio "Sobre o Sentido e a Referência".

22. O verbo *beurteilen* quer dizer "julgar" e o substantivo *Inhalt* pode ser traduzido pela palavra 'conteúdo'. Desse modo, a locução *beurteilbarer Inhalt* seria literalmente traduzida por 'conteúdo judicável'

to" e "valor de verdade". Ainda que não mais sustente literalmente, a explicação que aí dei (*Fundamentos*, § 66), mesmo assim ainda mantenho quanto ao essencial, a mesma opinião. Tomando "sujeito" e "predicado" em seu sentido lingüístico, podemos em resumo dizer: um conceito é a referência de um predicado, enquanto que um objeto é o que nunca pode ser a referência total de um predicado, embora possa ser a referência de um sujeito. Deve-se aqui observar que as palavras "todo", "cada", "nenhum", "algum" são antepostas a termos conceituais (*Begriffswörtern*). Em sentenças universais e particulares, afirmativas e negativas, expressamos relações entre conceitos e indicamos, por essas palavras, a peculiaridade desta relação. Da perspectiva da lógica, tais palavras se relacionam mais à sentença como um todo do que aos termos conceituais que as seguem. É fácil ver isto no caso da negação. Se na sentença

"Todos os mamíferos são terrestres"

a expressão "todos os mamíferos" fosse o sujeito lógico do predicado *são terrestres*, então para negar o todo teríamos de negar o predicado "não são terrestres". Ao invés, devemos pôr o "não" em frente de "todos", e disso decorre que "todos" logicamente pertence ao predicado. Em oposição a isto, negamos a sentença "O conceito *mamífero* está subordinado ao conceito *terrestre*" negando o predicado "não está subordinado ao conceito *terrestre*".

Se tivermos em mente que, em minha maneira de falar, expressões como "o conceito *F*" não designam conceitos, mas objetos, a maior parte das objeções de Kerry cai por terra. Se ele pensa (p. 281) que identifiquei conceito com extensão conceitual, se engana[23]. Apenas expressei minha opinião de que

ou 'conteúdo ajuizável' ou 'conteúdo que pode se tornar um juízo' ou ainda por 'conteúdo asserível', solução aqui seguida. Por *beurteilbare Inhalte*, Frege se refere aos conteúdos que *podem ser* objeto de uma asserção, que *podem ser* asseridos, que *podem ser* declarados verdadeiros, mas que *ainda* não o foram. Um conteúdo asserível é aquilo que constitui o objeto sobre o qual se exerce o ato de julgar. E só estes Frege qualifica de *beurteilbare Inhalte*. Pelo que vimos, Frege exclui do domínio dos conteúdos asseríveis (*beurteilbare Inhalte*) tanto o *conteúdo asserido* (que ele denomina de *Urteil*, 'juízo') como os *conteúdos não asseríveis*, isto é, conceitos isolados. Com isso, não se pode traduzir *beurteilbarer Inhalt* por 'conteúdo asserido', 'conteúdo de juízo' ou 'conteúdo proposicional'. Por fim, importa dizer que a noção de conteúdo asserível aparece nas primeiras obras de Frege, sendo utilizada até 1891. Depois desta data, este termo veio a ser substituído pela dicotomia *Gedanke*, 'pensamento', e *Wahrheitswert*, 'valor de verdade', como ele nos revela acima (N. do T.).

23. Para Frege, um conceito é uma função de um argumento cujo valor é sempre um valor de verdade. (Se assim é, nem toda função é um conceito). A extensão de um conceito (ou melhor dizendo, o percurso de valor da função que constitui o conceito) é um objeto determinado pelos argumentos e valores da

na expressão "o número cardinal que corresponde ao conceito *F* é a extensão do conceito *eqüinumérico ao conceito F*", as palavras "extensão do conceito" poderiam ser substituídas por "conceito". Deve-se notar aqui que esta palavra ['conceito'] está associada ao artigo definido. Isto, no entanto, foi apenas um comentário incidental, sobre o qual em nada me baseei.

Enquanto Kerry não consegue deste modo preencher o hiato que existe entre conceito e objeto, poder-se-ia tentar para tanto fazer uso de minhas próprias palavras. Disse[24] que a indicação de um número envolve predicar [de nível] algo de um conceito; falo porém de propriedades que são predicadas de um conceito e ainda admito que um conceito possa cair sob um outro conceito [de nível] superior[25]. Por fim, chamei a existência de propriedade de um conceito[26]. Um exemplo tornará claro o que entendo por tudo isto. Na sentença "Há pelo menos uma raiz quadrada de 4", estritamente nada se predica[27] do número 2, nem de -2; aqui o que se predica é do conceito[28] – *raiz quadrada de 4* –, [vale dizer] que ele não é vazio. Mas se viermos a expressar o mesmo pensamento pela sentença "O conceito *raiz quadrada de 4* está saturado", então as primeiras seis palavras constituem o nome próprio de um objeto, e essa sentença predica algo deste objeto. Mas deve-se notar aqui que a sentença que predica algo de um objeto não é a mesma que predica algo de um conceito. Isso só surpreenderá a quem desconheça que um pensamento pode ser decomposto de diversas maneiras, de tal modo que este ou aquele componente aparecerá ora como sujeito, ora como predicado. O pensamento por si só não é suficiente para determinar o que deve ser tomado como sujeito. Quando se diz "o sujeito deste juízo", só se designa um determinado componente quando, simultaneamente, se indica uma determinada maneira de decomposição. Freqüentemente, o sujeito é determinado em relação a uma certa disposição contextual. Mas nunca devemos esquecer que sentenças diferentes podem expressar o mesmo

função correspondente a esses argumentos. Portanto, a extensão de um conceito é sempre um objeto, em sentido fregeano, enquanto que um conceito nunca é um objeto (ente completo ou subordinado) mas uma função (ente insaturado ou incompleto). Observe-se que, segundo Frege, o conceito é logicamente anterior à sua extensão e não há como identificar um percurso de valor (de um conceito) a não ser a partir do próprio conceito (N. do T.).

24. *Fundamentos*, § 46.
25. *Fundamentos*, § 53.
26. Frege tem aqui em vista uma sentença existencial como 'Há pelo menos uma raiz quadrada de 4' (N. do T.).
27. Isto é, nada se atribui aos números (ou objetos) +2 ou –2; o que recebe o predicado é um conceito (N. do T.).
28. Em sentenças existenciais, o que recebe o predicado ou a atribuição de existência não é um objeto, mas um conceito, que, no exemplo em questão, é *raiz quadrada de 4*. A este conceito, e só a ele, é atribuído o predicado de que existe algo que cai sob ele, ou o predicado de que ele não é vazio (N. do T.).

pensamento. Assim, para o pensamento que estamos considerando, também se poderia encontrar para o número 4 um predicado da forma

"o número 4 tem a propriedade de que há algo do qual ele é o quadrado".

A linguagem tem meios de fazer atuar como sujeito esta ou aquela parte do pensamento[29]. Um dos meios mais conhecidos é a distinção entre formas ativa e passiva. De igual modo, não é impossível que um mesmo pensamento apareça, segundo uma análise, como singular, segundo outra, como particular e, segundo uma terceira, como universal. Não nos deve surpreender então que a mesma sentença possa ser concebida como uma asserção sobre um conceito ou como uma asserção sobre um objeto, desde que não se esqueça que estas asserções sejam distintas. Na sentença "Há pelo menos uma raiz quadrada de 4" é impossível substituir as palavras "uma raiz quadrada de 4" por "o conceito *raiz quadrada de 4*"; isto é, a asserção que convém ao conceito não convém ao objeto. Embora em nossa sentença o conceito não ocorra como sujeito, ainda assim ela assere algo a seu respeito. Ela pode ser concebida como expressando que um conceito cai sob um outro conceito superior[30]. Mas com isso não se elimina, de modo algum, a distinção entre objeto e conceito. Para começar, observemos que, na sentença "Há pelo menos uma raiz quadrada de 4", a natureza predicativa do conceito não foi abandonada. Pode-se dizer "Há algo que tem a propriedade de dar o resultado 4, quando multiplicado por si mesmo". Conseqüentemente, o que aqui se assere de um conceito nunca poderá ser asserido de um objeto; pois um nome próprio nunca pode ser uma expressão predicativa, embora possa ser parte de uma tal expressão. Não quero dizer que seja falso asserir de um objeto o que se assere de um conceito; quero dizer que é impossível, que é sem sentido. A sentença "Há Júlio César" não é verdadeira nem falsa, mas sem sentido, embora a sentença "Há um homem cujo nome é Júlio César" tenha sentido. Mas aqui temos novamente um conceito, como o mostra o artigo indefinido. O mesmo ocorre na sentença "Há apenas uma Viena". Não devemos nos deixar enganar pelo fato de a linguagem usar por vezes a mesma palavra ora como um nome próprio, ora como um termo conceitual. No exemplo acima, o numeral indica que se trata do último caso.

29. Cf. a este respeito *Conceitografia*, §3 (N. do T.).
30. Em meus *Fundamentos* chamei a um tal conceito de conceito de segunda ordem (*Ordnung*), e no meu escrito *Função e Conceito*, chamei-o de conceito de segundo nível (*Stufe*), o que farei também aqui.

"Viena" é aqui um termo conceitual tal como "cidade imperial". Nesse sentido, pode-se dizer "Trieste não é uma Viena". Mas, se na sentença "O conceito *raiz quadrada de 4* está saturado", substituímos o nome próprio constituído pelas seis primeiras palavras por "Júlio César", obtemos uma sentença dotada de sentido, embora falsa; pois o fato de estar saturado, na acepção em que esta palavra é aqui entendida, na verdade só pode ser asserido de objetos de um gênero muito peculiar, a saber, aqueles objetos que podem ser designados por um nome próprio da forma "o conceito *F*". As palavras "o conceito *raiz quadrada de 4*" se comportam, quanto à substituibilidade, de maneira totalmente distinta das palavras "uma raiz quadrada de 4" de nossa sentença original. O que mostra que as referências dessas duas combinações de palavras são essencialmente diferentes.

O que aqui foi mostrado mediante um exemplo tem validade geral: o comportamento do conceito é essencialmente predicativo, mesmo onde se predica algo dele. Conseqüentemente, ele só pode ser substituído por um outro conceito, nunca por um objeto. Assim, uma asserção feita a um conceito nunca convem a um objeto. Os conceitos de segundo nível, sob os quais caem os conceitos, são essencialmente diferentes dos conceitos de primeiro nível sob os quais caem os objetos. A relação de um objeto com um conceito de primeiro nível sob o qual ele cai é diferente, embora semelhante, da relação de um conceito de primeiro nível com um conceito de segundo nível. Caso se quisesse considerar com eqüidade a distinção e a semelhança [entre essas relações] poder-se-ia talvez dizer que um objeto cai *sob* um conceito de primeiro nível, e que um conceito cai *em* um conceito de segundo nível. Desse modo, a distinção entre conceito e objeto conserva toda sua nitidez.

A estas observações, deve-se associar o que eu disse no § 53 dos meus *Fundamentos* sobre o meu modo de usar as palavras "propriedade" e "nota"[31].

31. Frege, uma vez mais, volta à distinção entre *nota* (*Merkmal*) e *propriedade* (*Eigenschaft*), exposta pela primeira vez em seus *Fundamentos*, § 53. A razão de ser dessa distinção está no fato de ela eliminar a teoria tradicional da predicação. Assim, em homem é animal, animal não é uma propriedade de homem, mas uma de suas notas; mas homem e animal são propriedades de Platão. Por este exemplo vemos que a nota de um conceito é um de seus componentes, enquanto que a propriedade de um conceito é o fato de um objeto cair sob esse conceito. No que concerne aos números, cumpre distinguir duas situações. De um lado, as sentenças da forma '2 homens bravos e corajosos', em que bravo e corajoso são notas do conceito homem, enquanto que 2 é a indicação da seguinte propriedade: o conceito homem é satisfeito por dois objetos. De outro lado, nas sentenças da forma '2 é um inteiro, positivo e par', temos que inteiro, positivo e par são propriedades de 2 e notas do conceito inteiro positivo par. Além de 2, outros objetos também caem sob este conceito, *i. e.*, outros objetos também têm estas

As considerações de Kerry dão-me ocasião de tornar a esse tema. Tais palavras servem para designar relações em sentenças como "Φ é uma propriedade de Γ" e "Φ é uma nota de Ω". Em meu modo de falar, algo pode ser simultaneamente propriedade e nota, mas não da mesma coisa. Chamo os conceitos sob os quais cai um objeto de propriedades deste objeto, e assim

"ser Φ é uma propriedade de Γ"

é apenas outra maneira de dizer

"Γ cai sob o conceito Φ".

Se o objeto Γ tem as propriedades Φ, X e Ψ, então posso reuni-las em Ω, de modo que seja a mesma coisa dizer que Γ tem a propriedade Ω, ou dizer que Γ tem as propriedades Φ, X e Ψ. Chamo pois Φ, X e Ψ de notas do conceito Ω e, simultaneamente, de propriedades de Γ. É claro que as relações de Φ com Γ e as relações de Φ com Ω são totalmente diferentes, e por este motivo emprega-se uma denominação distinta. Γ cai sob o conceito Φ; mas Ω, que também é um conceito, não pode cair sob o conceito de primeiro nível Φ; só com um conceito de segundo nível poderia Ω ter uma relação similar. Por outro lado, Ω está subordinado a Φ. Consideremos um exemplo. Em vez de dizer

"2 é um número positivo" e
"2 é um número inteiro" e
"2 é menor que 10"

também podemos dizer

"2 é um número inteiro positivo menor que 10".

propriedades: 4, 6, 8, ... Um objeto que caia sob este conceito tem essas notas como propriedades. Observe-se que este conceito *não* é inteiro, nem positivo, nem par. O conceito sob o qual cai um objeto é propriedade deste objeto. Também as notas constitutivas de um conceito sob o qual cai um objeto são igualmente propriedade do objeto. Algo pode ser simultaneamente nota e propriedade, mas não da mesma coisa. Assim, par é propriedade do objeto 2 e nota do conceito inteiro positivo par. Por fim, as notas do conceito subordinante são também notas do conceito subordinado – *v.g.*, em 'Todos os quadrados são retângulos', como *retângulo* subordina *quadrado*, as notas de retângulo são também notas de quadrado (N. do T.).

Aqui

ser um número positivo,
ser um número inteiro,
ser menor que 10

são propriedades do objeto 2, e simultaneamente notas do conceito

número inteiro positivo menor que 10.

Este [conceito] não é positivo, nem um número inteiro, nem menor que 10. Ele é subordinado ao conceito *número inteiro*, mas não cai sob ele.

Comparemos essas considerações com o que Kerry diz em seu segundo artigo (p. 424)[32]: "Por número 4 entende-se o resultado da combinação aditiva de 3 com 1. Aqui o objeto conceitual (*Begriffsgegenstand*) do conceito assim produzido é o indivíduo numérico 4, um número bem determinado da série dos números naturais. Esse objeto, obviamente, traz consigo apenas as notas que são nomeadas em seu conceito – caso evitemos, como devemos certamente fazer, de considerar como *propria*[33] do objeto as infinitas relações que o ligam a todos os demais indivíduos numéricos –, e nenhuma outra nota: 'o' [número] 4 é, igualmente, o resultado da combinação aditiva de 3 com 1."

Aqui vemos de imediato que minha distinção entre propriedade e nota foi totalmente ignorada. Kerry distingue o número 4 de "o" número 4. Devo confessar que tal distinção é incompreensível para mim. O número 4 deveria ser um conceito; "o" número 4 deveria ser um objeto conceitual, e nada mais que o indivíduo numérico 4. Não é preciso provar que aqui não é observada a minha distinção entre conceito e objeto. Quase parece que Kerry aqui pensou – embora muito obscuramente – na distinção que faço entre o sentido e a referência das palavras "o número 4"[34]. Mas somente da referência pode-se dizer que é o resultado da combinação aditiva de 3 com 1.

Como se deve entender o "é" que ocorre nas sentenças "o número 4 é o resultado da combinação aditiva de 3 com 1" e "'o' número 4 é o resultado da

32. No texto original alemão, lê-se erroneamente 'p. 224' (N. do T.).
33. O substantivo neutro latino *proprium* (pl. *propria*) é a forma tradicionalmente empregada para traduzir o vocábulo aristotélico ἴδιον para o latim. Por esta palavra latina se designa, de modo geral, a propriedade ou o conjunto de propriedades que pertence a todos os elementos de uma classe e somente a eles, sem contudo ocorrer em sua definição (N. do T.).
34. Cf. meu artigo acima citado "Sobre o Sentido e a Referência".

combinação aditiva de 3 com 1"? É uma simples cópula[35], ou contribui para expressar uma igualdade lógica? No primeiro caso, cumpriria suprimir o "o" diante de "resultado", e as sentenças deveriam ser escritas da seguinte maneira

"O número 4 é resultado da combinação aditiva de 3 com 1"

e

"'O' número 4 é resultado da combinação aditiva de 3 com 1."

Teríamos assim o caso em que os objetos que Kerry designa por

"o número 4" e "'o' número 4"

cairiam sob o conceito

resultado da combinação aditiva de 3 com 1.

Restaria, assim, investigar em que reside a diferença entre estes objetos. Uso aqui as palavras "objeto" e "conceito" em minha acepção. Mas, o que Kerry está aparentemente querendo dizer, eu o expressaria da seguinte maneira:

"O número 4 tem como propriedade aquilo, e somente aquilo, que são notas do conceito: *resultado da combinação aditiva de 3 com 1.*"

E expressaria da maneira seguinte o sentido da primeira de nossas duas sentenças:

"Ser um número 4 é o mesmo que ser resultado da combinação aditiva de 3 com 1."

e, então, o que suponho ser a opinião de Kerry poderia ser também expresso assim:

"O número 4 tem como propriedades aquilo, e somente aquilo, que são notas do conceito *número 4.*"

35. Cf. cap. 6, n. 7 (N. do T.).

Se isto é verdadeiro ou não, não precisamos decidir aqui. As aspas em torno do artigo definido em "'o' número 4", poderiam assim ser omitidas.

Mas, nessas tentativas de interpretação, supusemos que os artigos definidos em frente de "resultado" e "número 4" só foram colocados por equívoco, pelo menos em uma das duas sentenças. No segundo caso[36], se tomamos as palavras como elas ocorrem, seu sentido só pode ser o de uma igualdade lógica, como

"O número 4 não é outra coisa senão o resultado da combinação aditiva de 3 com 1".

O artigo definido em frente de "resultado" só se justifica logicamente aqui caso se admita: 1) que existe tal resultado; 2) que não existe mais do que um. Caso isto se dê, a seqüência de palavras designa um objeto e deve ser considerada como um nome próprio. Se ambas as nossas sentenças devessem ser entendidas como igualdades lógicas, disso se seguiria, já que os membros da direita de ambas coincidem, que o número 4 é 'o' número 4, ou, se o leitor quiser, que o número 4 nada mais é do que 'o' número 4. E, assim, a distinção de Kerry ter-se-ia revelado insustentável. Minha tarefa, porém, não é apontar contradições em sua exposição. O que ele entende pelas palavras "objeto" e "conceito" não constitui propriamente minha preocupação; aqui quero apenas esclarecer melhor meu próprio modo de usar essas palavras e mostrar que meu uso difere do dele, quer este seja coerente consigo mesmo ou não.

Não discuto absolutamente o direito de Kerry usar as palavras "objeto" e "conceito" a seu modo, mas ao menos ele deveria respeitar meu direito e admitir que, com esses termos, levei em conta uma distinção da mais alta importância. Admito que existe um obstáculo peculiar em minha comunicação com o leitor, pois, por uma certa necessidade lingüística, minha expressão tomada literalmente não expressa, às vezes, meu pensamento, uma vez que nomeia um objeto onde se visava um conceito. Estou plenamente consciente de que conto, em tais situações, com a complacência do leitor, que não me negaria um grão de sal[37].

36. Note-se que Frege se indaga, na página anterior, 'como entender o "é" que ocorre nas sentenças "o número 4 é o resultado da combinação aditiva de 3 com 1" e "'o" número 4 é o resultado da combinação aditiva de 3 com 1"?' E responde que duas são as possibilidades. No primeiro caso, o 'é' seria uma simples cópula, como foi acima examinado. No segundo caso, o 'é' seria uma igualdade. Esta última hipótese é que agora se passa a discutir (N. do T.).

37. A expressão *mit einem Körnchen Salz* ('com um grão de sal') de que Frege se vale é a tradução literal para o alemão da célebre locução latina *cum grano salis* ('com um grão de sal'), locução que em sentido figurado é utilizada para qualificar uma expressão que cumpre ser interpretada em sentido

Pode-se talvez pensar que isso seja uma dificuldade criada artificialmente, e que não é absolutamente necessário levar em conta algo tão difícil de manipular como o que chamei de conceito, e que se poderia, tal como o faz Kerry, entender o cair de um objeto sob um conceito como uma relação na qual o que em *uma* ocasião pode aparecer como objeto, em outra afigura-se como conceito. As palavras "objeto" e "conceito" serviriam então apenas para indicar diferentes posições dos termos na relação. Isto pode ser feito; mas quem crê que a dificuldade foi assim evitada está muito enganado. Ela apenas se deslocou, pois nem todas as partes de um pensamento podem ser completas: pelo menos uma delas deve ser, de alguma maneira, insaturada ou predicativa; de outra forma, elas não se articulariam entre si. Assim, por exemplo, o sentido da combinação de palavras "o número 2" não se articula sem um nexo com o da expressão "o conceito *número primo*". É precisamente esse nexo que aplicamos à sentença "o número 2 cai sob o conceito *número primo*". Tal nexo está contido nas palavras "cai sob", que necessitam de uma dupla complementação por um sujeito e por um complemento[38], e estas palavras ['... cai sob ...'] só podem servir de nexo por força da insaturação de seu sentido. Somente quando são complementadas nesse duplo aspecto, temos um sentido fechado, temos um pensamento. Digo que essas palavras ou combinações de palavras ['cai sob'] se referem a uma relação. Mas nesta relação temos a mesma dificuldade que estávamos tentando evitar no que tange aos conceitos; pois, com as palavras "a relação cair um objeto sob um conceito", não designamos uma relação, mas um objeto, e os três nomes próprios "o número 2", "o conceito *número primo*" e "a relação cair um objeto sob um conceito" estão tão distantes entre si quanto os dois primeiros; por mais que tentemos colocá-los um ao lado do outro, não obtemos nenhuma sentença. Assim compreendemos facilmente que a dificuldade que se encontra na insaturação de uma parte de um pensamento pode realmente se deslocar, mas não se evitar. "Completo" e "insaturado" são, por certo, apenas expressões figuradas, mas aqui só quero e posso fazer sugestões.

A compreensão se tornará mais fácil se o leitor consultar meu artigo *Função e Conceito*. Pois, em face à questão do que na Análise chama-se função, defrontamo-nos com a mesma dificuldade[39]. Uma análise mais minucio-

adequado ou que cabe ser tomada com grande ponderação e cautela. Aqui, porém, ela é utilizada no sentido de que não se negará uma pequena concessão (N. do T.).

38. Em alemão, lê-se o equivalente a 'um acusativo' (N. do T.).

39. Importa não esquecer que para Frege conceito é uma função de um argumento e relação é uma função de mais de um argumento. Portanto, conceito e relação são casos especiais de função (N. do T.).

sa fará concluir que a dificuldade reside na própria natureza da questão e de nossa linguagem; que é impossível evitar uma certa inadequação da expressão lingüística; e que não nos resta senão tornar-nos dela conscientes e levá-la sempre em conta.

7

SOBRE O SENTIDO E A REFERÊNCIA (1892)

A igualdade[1] desafia a reflexão, dando origem a questões que não são fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos? Ou entre nomes ou sinais de objetos? Em minha *Begriffsschrift*[2] assumi a última alternativa[3]. E as razões que parecem apoiar esta alternativa são as seguintes: $a = a$ e $a = b$ são, evidentemente, sentenças de valor cognitivo diferentes, pois $a = a$ sustenta-se *a priori* e, segundo Kant, deve ser denominada de analítica, enquanto que sentenças da forma $a = b$ contêm, freqüentemente, extensões muito valiosas de nosso conhecimento, e nem sempre podem ser estabelecidas *a priori*. A descoberta de que o sol nascente não é novo cada manhã,

Publicado pela primeira vez sob o título de 'Über Sinn und Bedeutung' em *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, NF, 100 (1892) pp. 25-50. E republicado em G. Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, ed. G. Patzig, Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht, 1962, pp. 40-65.

1. Uso essa palavra no sentido de identidade, e entendo "$a = b$" no sentido de "a é o mesmo que b" ou "a e b coincidem".
2. *Begriffsschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879, § 8 (N. do T.).
3. Na *Conceitografia* (1879) a igualdade é uma relação que se dá entre nomes ou símbolos: o sinal A é igual ao sinal B, caso tenham o mesmo conteúdo conceitual. Frege porém alerta, no presente artigo, que a relação de igualdade entre símbolos ou sinais corre o risco de ser tomada como uma mera abreviação. Com isto, do presente artigo em diante, ele passa a utilizar a igualdade como uma relação que se dá entre objetos e não mais entre sinais. Ficou assim banida a hipótese da igualdade vir a ser uma mera abreviação arbitrária, já que ela nos pode dar informações originais sobre fatos do mundo. Tal é o que se dá quando sob distintas apresentações reconhecemos o mesmo objeto (N. do T.).

mas é sempre o mesmo, foi uma das descobertas astronômicas mais ricas em conseqüências. Mesmo atualmente, o reconhecimento de um pequeno planeta ou de um cometa nem sempre é evidente por si. Assim, se quiséssemos considerar a igualdade como uma relação entre os objetos a que os nomes "*a*" e "*b*" se referem, então $a = b$ não pareceria diferir de $a = a$, caso $a = b$ fosse verdadeira[4]. Desse modo, expressaríamos a relação de uma coisa consigo mesma, relação que toda coisa tem consigo mesma, mas que nunca se dá entre duas coisas distintas. Mas, por outro lado, parece que por $a = b$ quer-se dizer que os sinais ou os nomes "*a*" e "*b*" referem-se à mesma coisa; e neste caso, a discussão versaria sobre esses sinais: uma relação entre eles seria asserida[5].Mas tal relação entre os nomes ou sinais só se manteria na medida em que eles denominassem ou designassem alguma coisa. A relação surgiria da conexão de cada um dos dois sinais com a mesma coisa designada. Essa conexão, porém, é arbitrária. Ninguém pode ser impedido de empregar qualquer objeto ou evento arbitrariamente produzido como um sinal para qualquer coisa. Com isto, a sentença $a = b$ não mais se referiria propriamente à coisa, mas apenas à maneira pela qual a designamos; não expressaríamos por seu intermédio, propriamente, nenhum conhecimento. Mas é justamente isto o que queremos expressar em muitos casos. Se o sinal "*a*" difere do sinal "*b*" apenas enquanto objeto (aqui, por sua configuração), não enquanto sinal – isto é, não pela maneira como designa alguma coisa – então o valor cognitivo de $a = a$ seria essencialmente igual ao de $a = b$, desde que $a = b$ seja verdadeira. Uma diferença entre elas só poderá aparecer se à diferença entre os sinais corresponda uma diferença no modo de apresentação do objeto designado. Sejam *a*, *b*, *c* as linhas que ligam os vértices de um triângulo com os pontos médios dos lados opostos. O ponto de interseção de *a* e *b* é o mesmo que o ponto de interseção de *b* e *c*. Temos, assim, diferentes designações para o mesmo ponto, e estes nomes ("ponto de interseção de *a* e *b*" e

4. O emprego sistemático, ou quase sistemático, de aspas para indicar a distinção entre uso e menção aparece pela primeira vez no presente artigo (N. do T.).

5. Aqui, e nas demais ocorrências, optamos por traduzir o verbo *behaupten* e o substantivo *Behauptung*, respectivamente, por 'asserir' e 'asserção'. Asserir é o ato pelo qual manifestamos, publica e exteriormente, a verdade de um juízo. A asserção é o *conteúdo* relativo a esse *ato* de asserir. As linguagens naturais, ao contrário da conceitografia, não se utilizam de um sinal para indicar que um juízo é verdadeiro ou que foi asserido. Cumpre também dizer que associar a uma proposição a expressão 'é verdade que ... ' tampouco fornece força assertiva a um pensamento. O que imprime asserção a um conteúdo asserível (a mera apreensão de um pensamento) é um certo modo de expressá-lo, é uma certa maneira de proferi-lo, é o contexto de seriedade e compenetração que o envolve (N. do T.).

"ponto de interseção de *b* e *c*")[6] indicam também os modos pelos quais esses pontos são apresentados. E, em conseqüência, a sentença contém um genuíno conhecimento.

É, pois, plausível pensar que exista, unido a um sinal (nome[7], combinação de palavras, letras), além daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência (*Bedeutung*)[8], ainda o que eu gostaria de chamar de o sentido (*Sinn*) do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto[9]. Conseqüentemente, segundo nosso exemplo acima, a referência das expressões "o ponto de interseção de *a* e *b*" e "o ponto de interseção de *b* e *c*" seria a mesma, mas não os seus sentidos. A referência de "estrela da tarde" e "estrela da manhã" é a mesma, mas não o sentido[10].

Nesse contexto fica claro que, por "sinal" e por "nome", entendo qualquer designação que desempenhe o papel de um nome próprio[11], cuja referência seja

6. Observe-se que Frege aqui omite o artigo definido *der* quando menciona as diferentes designações de um mesmo ponto ("*Schnittpunkt von a und b*" etc.), o que é aparentemente um lapso. Como o leitor percebe, seguimos fielmente o original alemão (N. do T.).
7. Um conceito básico da semântica fregeana é a noção de nome (*Name*). Ele assim denomina qualquer sinal, ou combinação de sinais, que se refira a (*bedeuted*) algo, em vez de meramente indicá-lo (*andeutet*). *Grundgesetze*, I, p. 26. Ele amplia a noção de nome quando os distingue em *nomes de objetos* (ou expressões nominativas) – como nomes próprios, descrições definidas, sentenças etc. – e *nomes de função* (ou expressões predicativas) – nomes de propriedades (incluindo a cópula), funções, relações etc. (N. do T.).
8. Ao leitor cumpre alertar para o fato de que Frege se utiliza da palavra *Bedeutung*, em seu sentido técnico, ora na acepção de 'referência' e ora na acepção de 'referente', indistintamente (N. do T.).
9. Em sua *Conceitografia*, Frege dispunha da noção de *conteúdo asserível*. É no presente artigo que ele introduz a distinção entre *sentido* e *referência* de uma expressão, seja esta um nome próprio, um termo conceitual ou uma sentença (N. do T.).
10. Frege aqui uma vez mais omite o artigo definido em 'estrela da manhã' e 'estrela da tarde', o que pode ser interpretado como um lapso, já que ele foi aliás o primeiro a chamar a atenção para a função do artigo definido quando anteposto a um nome conceitual (N. do T.).
11. Um nome próprio (*Eigenname*), em acepção fregeana, é um sinal e, como tal, tem condições restritas de significado. Um nome próprio é uma expressão saturada que deve designar ou se referir a um objeto determinado, e de um modo determinado. Dada a diferença radical entre objeto e conceito, um nome próprio não pode designar um conceito e assim não pode exercer a função de predicado. As expressões que se seguem são exemplos de nomes próprios, na acepção fregeana: 1) 'Aristóteles'; 2) 'Ulisses'; 3) numerais – como '2'; 4) demonstrativos singulares – como 'este'; 5) denominações de objetos únicos – como 'Vênus'; 6) descrições definidas – v. g., 'o discípulo de Platão e o mestre de Alexandre Magno'; 7) 'Estrela da Manhã'; 8) 'quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias'; 9) proposições, enquanto expressões saturadas que designam valores de verdade. Por esses exemplos pode-se observar que nem tudo o que Frege denomina de 'nome próprio' coincide com o uso ordinário desta expressão. Esses exemplos nos permitem induzir uma classificação para os nomes próprios: i) *nomes simples* e ii) *nomes complexos* ou *nomes descritivos* ou *descrições*. A concepção fregeana de que todo nome próprio ordinário deve ter não apenas um referente, mas também um sentido, segue-se diretamente de sua doutrina acerca do sentido e da referência das expressões. Todo nome próprio tem um sentido, que constitui a maneira pela qual o objeto é denominado (N. do T.).

um objeto determinado (esta palavra tomada na acepção a mais ampla), mas não um conceito ou uma relação, que serão discutidos em outro artigo[12]. A designação de um objeto singular pode consistir em várias palavras ou sinais. Para sermos breves, chamaremos de nome próprio toda designação desse gênero[13].

O sentido de um nome próprio é apreendido por todos que estejam suficientemente familiarizados com a linguagem ou com a totalidade de designações a que o nome próprio pertence[14]; isto, porém, só de maneira parcial elucida a referência do nome, caso ele tenha uma. Para um conhecimento total da referência, exigir-se-ia que fôssemos capazes de dizer, de imediato, para cada sentido dado pertence ou não a essa referência. Isto, porém, nunca conseguiremos fazer[15].

A conexão regular entre um sinal, seu sentido e sua referência é de tal modo que ao sinal corresponde um sentido determinado e ao sentido, por sua vez, corresponde uma referência determinada, enquanto que uma referência (um objeto) pode receber mais de um sinal. E ainda, um mesmo sentido tem em diferentes linguagens, ou até na mesma linguagem, diferentes expressões. É verdade que exceções a essa regra ocorrem. Certamente, a cada expressão que pertença a um sistema perfeito de sinais[16] deveria corresponder um sentido[17] determinado; as linguagens naturais, porém, raramente satisfazem a essa exigência e deve-se ficar satisfeito se a mesma palavra, no mesmo contexto, sem-

12. São os termos conceituais que se contrapõem aos nomes próprios, que têm como referência conceitos, funções e relações, sem nisto envolver suas extensões. Cf. 'Sobre o Conceito e o Objeto' (N. do T.).
13. Mais tarde, ele virá a estender a oposição sentido/referência para os termos conceituais. Cf. 'Digressões sobre o Sentido e a Referência' (N. do T.).
14. No caso de um nome próprio genuíno como "Aristóteles", as opiniões quanto ao sentido podem certamente divergir. Poder-se-ia, por exemplo, tomar como seu sentido o seguinte: o discípulo de Platão e o mestre de Alexandre Magno. Quem fizer isso associará outro sentido à sentença "Aristóteles nasceu em Estagira" do que alguém que tomar como sentido daquele nome: o mestre de Alexandre Magno que nasceu em Estagira. Enquanto a referência permanecer a mesma, tais oscilações de sentido podem ser toleradas, ainda que elas devam ser evitadas na estrutura teórica de uma ciência demonstrativa, não devem ter lugar numa linguagem perfeita.
15. O sentido é o mediador entre a expressão (nome próprio, termo conceitual ou sentença) e seu referente. Importa dizer que, segundo Frege, o sentido de uma expressão não é uma realidade *lingüística*, nem *subjetiva* (como a idéia), nem *psicológica* e menos ainda um *objeto*. Uma expressão pode ter sentido tendo ou não um referente (N. do T.).
16. A expressão 'um sistema perfeito de sinais' (*vollkommenen Ganzen von Zeichen*) é outra descrição ou nome de que Frege se vale para designar uma conceitografia (N. do T.).
17. Frege nos diz aqui que a toda expressão deve corresponder um sentido e somente um. Numa conceitografia não devem ocorrer nem expressões sem sentido nem expressões polissêmicas. Essa porém não é sua única exigência. Em carta de 24 de maio de 1891 a E. Husserl ele assim se manifesta: 'Para o uso poético, basta que tudo tenha um sentido; mas para o uso científico é necessário também que não careça de referência'. G. Frege, *Briefwechsel*, p. 96 (N. do T.).

pre tiver o mesmo sentido. Pode-se talvez admitir que uma expressão sempre tenha um sentido, caso seja gramaticalmente bem construída, e desempenhe o papel de um nome próprio. Mas com isso não se quer dizer que sempre exista uma referência correspondente ao sentido[18]. As palavras "o corpo celeste mais distante da terra" têm um sentido, mas é muito duvidoso que também tenham uma referência. A expressão "a série que converge menos rapidamente" tem um sentido, mas provadamente não tem referência, já que para cada série convergente dada, uma outra série que converge menos rapidamente pode sempre ser encontrada[19]. Portanto, apreender um sentido nunca assegura a existência de sua referência.

Se as palavras são usadas de modo costumeiro, o que se pretende é falar de sua referência[20]. Mas pode acontecer que se deseje falar das próprias palavras ou de seu sentido[21]. O primeiro caso se dá quando as palavras de outrem são citadas em discurso direto[22]. Nesse caso, as palavras de quem cita referem-se, imediatamente, às palavras de quem é citado, e somente estas últimas têm sua referência costumeira. Temos, assim, sinais de sinais, ao se escrever, encer-

18. Frege trata aqui dos *Scheineigenname, i. e.*, os nomes próprios aparentes ou vazios. Um nome próprio aparente é aquela expressão saturada que tem um sentido, mas carece de referente. Aqui, nos são dados dois exemplos – um empírico e outro formal – de tais nomes: 'o corpo celeste mais distante da terra' e 'a seqüência que converge menos rapidamente' – o segundo certamente descreve sem nada designar, ao passo que o primeiro é antes uma suposição (N. do T.).

19. Em face das dificuldades do exemplo empírico, Frege se utiliza aqui do importante teorema da Análise que diz que em uma série de números reais convergente toda subseqüência converge para o mesmo valor, e assim podemos afirmar que essa subseqüência, que também é uma série, converge mais rápido do que a série original (N. do T.).

20. Frege foi levado a distinguir sentido e referência *costumeiras* de sentido e referência *indiretas* (de um termo ou de uma sentença) a fim de manter o princípio de substituibilidade de expressões de mesma referência. Toda argumentação de Frege (para justificar sua teoria semântica) se fundamenta neste princípio enunciado por Leibniz (cf. cap. 7, n. 41). Utilizando sua terminologia, 'no discurso direto' (*gerade Rede*) as palavras são usadas de modo habitual e assim o que se pretende é falar de sua referência. No 'discurdo indireto' (*ungerade Rede*) o discurso de outrem é tomado como objeto de nosso discurso; neste caso fala-se sobre as *palavras* ou sobre o *sentido* das palavras de outrem. Neste caso, as palavras não têm sua referência costumeira (N. do T.).

21. Aqui é feita a distinção entre *referência costumeira* (*gewöhnliche Bedeutung*) e *referência indireta* (*ungerade Bedeutung*). No primeiro caso, da referência costumeira, temos o que se dá no discurso direto, vale dizer, quando as palavras são usadas de maneira usual e com sua referência habitual. No segundo caso, temos o que ocorre no discurso indireto, isto é, as palavras são usadas com a referência indireta seja para falar das próprias palavras (*v. g.*, quando se citam as palavras de outrem), seja para falar do sentido das palavras (*i. e.*, quando se fala do sentido das palavras de outrem). No discurso indireto as palavras não têm suas referências costumeiras (N. do T.).

22. Nos deparamos com esta situação quando se relata em discurso direto as palavras de outrem. Tal é por exemplo o caso da sentença 'Descartes disse "penso logo existo"'. Aqui, a sentença entre aspas não devem ser tomadas nem em sua referência nem em seu sentido costumeiros. A referência de minhas palavras são as palavras proferidas por aquele que eu acabo de citar (N. do T.).

ram-se as palavras entre aspas. Em conseqüência, uma palavra que se encontre entre aspas não deve ser tomada como tendo sua referência costumeira.

Quando se quer falar do sentido de uma expressão "*A*", pode-se fazê-lo simplesmente através da locução "o sentido da expressão '*A*'". No discurso indireto, fala-se do sentido das palavras de outrem. Fica, pois, claro que também no discurso indireto as palavras não têm suas referências costumeiras, mas referem-se ao que costumeiramente é seu sentido[23]. De modo mais sucinto, diremos que no discurso indireto as palavras são usadas *indiretamente*, ou ainda que sua referência é *indireta*. Em conseqüência, distinguimos a referência *costumeira* de uma palavra de sua referência *indireta;* e de modo similar o seu sentido *costumeiro* de seu sentido *indireto*. A referência indireta de uma palavra é, pois, seu sentido costumeiro. Tais exceções devem sempre ser lembradas, caso se deseje compreender corretamente o modo de conexão entre sinal, sentido e referência para cada caso particular.

A referência e o sentido de um sinal devem ser distinguidos da idéia (*Vorstellung*) associada a este sinal. Quando a referência de um sinal é um objeto sensorialmente perceptível, então a idéia que dele tenho é uma imagem interna, emersa das lembranças de impressões sensíveis passadas e das atividades, internas e externas, que realizei[24]. Essa imagem interna está freqüentemente impregnada de emoções; os matizes de suas diversas partes variam e oscilam. Até num mesmo homem, nem sempre a mesma idéia está associada ao mesmo sentido. A idéia é subjetiva: a idéia de um homem não é a mesma de outro. Disto resulta uma variedade de diferenças nas idéias associadas ao mesmo sentido. Um pintor, um cavaleiro e um zoólogo provavelmente associarão idéias muito diferentes ao nome "Bucéfalo"[25]. A idéia, por tal razão, difere essencialmente do sentido de um sinal, o qual pode ser a propriedade comum de muitos e, portanto, não é uma parte ou modo da mente individual. Pois dificilmente se poderá negar que a humanidade possui um tesouro comum de pensamentos, que é transmitido de uma geração para outra[26].

23. Tal é o caso da sentença em discurso indireto, em que as palavras são usadas indiretamente, 'Pedro disse que a estrela matutina é Vênus', em que os nomes 'Vênus' e 'a estrela matutina' têm antes referência indireta que referência costumeira: eles se referem a seu sentido costumeiro (N. do T.).
24. Podemos incluir, entre as idéias, as intuições, nas quais as impressões sensoriais e as próprias atividades ocupam o lugar dos traços que estas mesmas impressões e atividades deixaram na mente. A distinção é, para o nosso objetivo, irrelevante, dado que as sensações e atividades sempre são acompanhadas de suas recordações de modo a completar a imagem intuitiva. Pode-se também entender a intuição como sendo um objeto, na medida em que este seja espacial ou sensorialmente perceptível.
25. Tal é o nome do cavalo de Alexandre Magno (N. do T.).
26. Donde ser desaconselhável usar a palavra "idéia" para designar algo tão fundamentalmente diferente.

Se, por um lado, não existe nenhuma objeção em se falar do sentido sem maiores esclarecimentos, no que tange à idéia deve-se, para ser preciso, vinculá-la a quem e a que época pertence. Poder-se-ia talvez objetar: assim como, a uma mesma palavra, alguém pode associar esta ou aquela idéia, do mesmo modo alguém pode associar a essa palavra este ou aquele sentido. Mas a diferença aqui reside no modo de associação. Isto não impede que vários indivíduos apreendam o mesmo sentido; mas eles não podem ter a mesma idéia. *Si duo idem faciunt, non est idem.* Quando dois homens imaginam a mesma coisa, ainda assim cada um tem sua própria idéia. De fato, às vezes é possível estabelecer diferenças entre as idéias, ou até mesmo entre as sensações, de diferentes homens. Mas uma comparação exata não é possível, porque não podemos reunir essas idéias numa mesma consciência.

A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a idéia que dele temos é inteiramente subjetiva; entre uma e outra está o sentido que, na verdade, não é subjetivo como a idéia, mas que também não é o próprio objeto. A comparação seguinte poderá, talvez, esclarecer essas relações. Alguém observa a lua através de um telescópio[27]. Comparo a própria lua à referência; ela é o objeto da observação, proporcionado pela imagem real projetada pela lente no interior do telescópio, e pela imagem retiniana do observador. A primeira imagem comparo ao sentido, a segunda, à idéia ou intuição. A imagem real dentro do telescópio é, na verdade, relativa, depende do ponto de vista da observação; não obstante, ela é objetiva, na medida em que pode servir a vários observadores. De fato, ela poderia ser disposta de tal forma que vários observadores poderiam utilizá-la simultaneamente. Mas no que diz respeito à imagem retiniana cada um dos observadores teria sua própria imagem. Devido à diversidade da configuração dos olhos, mesmo uma congruência geométrica entre tais imagens dificilmente poderia ser obtida, e uma coincidência real seria impossível. Essa comparação poderia, talvez, ser desenvolvida ainda mais admitindo-se que a imagem retiniana de *A* pudesse tornar-se visível para *B*; ou, ainda, que *A* pudesse ver sua própria imagem retiniana num espelho. Dessa forma poderíamos mostrar como uma idéia pode, ela mesma, ser tomada por objeto; mas não obstante ela nunca seria, para o observador, o que ela é diretamente para seu sujeito. Mas prosseguir neste caminho nos levaria longe demais.

27. Quando isto se dá, observa Frege, temos as três seguintes analogias: i) a lua ela mesma (*i. e.*, o referente), ii) a lua enquanto imagem da objetiva (*i. e.*, o sentido), e iii) a lua enquanto imagem da retina (*i. e.*, a idéia). N. do T.

Podemos, agora, admitir três planos de diferença entre palavras, expressões e sentenças completas. Estas diferem [entre si] seja quanto às idéias, seja quanto ao sentido mas não à referência, ou finalmente seja também quanto à referência. Quanto ao primeiro plano, deve-se notar que, devido à associação incerta das idéias com as palavras, alguém pode ver uma diferença que outro não consegue ver. A diferença entre uma tradução e o texto original não deveria ultrapassar este primeiro plano. Pertencem ainda a essas possíveis diferenças os coloridos e os sombreados que a arte poética e a eloqüência procuram dar ao sentido. Tais coloridos e sombreados não são objetivos, mas devem ser evocados pelo próprio ouvinte ou leitor, conforme as sugestões do poeta ou do orador. Se não houvesse alguma afinidade entre as idéias humanas, a arte seria certamente impossível, embora não se possa averiguar exatamente até onde estas correspondem às intenções do poeta.

A seguir não mais falaremos acerca das idéias e intuições; elas só foram aqui mencionadas para evitar que a idéia evocada no ouvinte por uma palavra seja confundida com o sentido ou com a referência dessa palavra.

A fim de tornar possível expressões curtas e exatas, estabeleçamos as seguintes formulações:

Um nome próprio (palavra, sinal, combinação de sinais, expressão) expressa seu sentido e designa ou refere-se à sua referência. Por meio de um sinal expressamos seu sentido e designamos sua referência[28].

Idealistas ou céticos terão, talvez, objetado há longo tempo: "Você fala, sem maiores cuidados, da lua como um objeto; mas como sabe que o nome 'a lua' tem de fato uma referência? Como sabe que alguma coisa, o que quer que seja, tem uma referência?" Respondo que não é nossa intenção falar da nossa idéia de lua, nem nos contentamos apenas com o sentido quando dizemos "a lua"; pelo contrário, pressupomos uma referência[29]. Seria positivamente entender mal o sentido da sentença "A lua é menor do que a terra" admitir-se que é a idéia de lua o que está em questão. Se isso é o que queria o locutor, ele deveria usar a locução "minha idéia de lua". Podemos, naturalmente, ser enganados ao pressupor uma referência, e tais enganos têm, de fato, ocorrido. Mas

28. Frege aqui explicita o significado de três verbos: 'expressar' (*ausdrücken*, isto é, a relação que se dá entre uma expressão e seu sentido), 'referir' e 'designar' (*bedeuten, bezeichnen*, isto é, a relação que se dá entre uma expressão e seu objeto). Também fica claro na passagem acima que o substantivo *Bedeutung*, será usado para designar tanto a relação de referir como a própria coisa referida (*refertum*). N. do T.

29. Enquanto que em uma conceitografia, cumpre notar, nomes próprios vazios (carentes de referência) não têm qualquer utilidade, termos conceituais vazios, pelo contrário, podem ter seu lugar (N. do T.).

a pergunta de se nos enganamos sempre ou não pode ficar aqui sem resposta; basta, por ora, indicar nossa intenção ao falar ou ao pensar, para justificar que falamos da referência de um sinal, mesmo que tenhamos de acrescentar a ressalva: caso tal referência exista.

Até aqui só consideramos o sentido e a referência daquelas expressões, palavras ou sinais a que chamamos nomes próprios[30]. Agora passemos a investigar qual seja o sentido e a referência de uma sentença assertiva completa. Tal sentença contém um pensamento (*Gedanke*)[31]. Deve este pensamento ser considerado o sentido ou a referência da sentença? Vamos admitir que a sentença possui uma referência. Se substituirmos uma palavra da sentença por uma outra palavra que tenha a mesma referência, mas sentido diferente, essa substituição não poderá ter nenhuma influência sobre a referência da sentença. Contudo, vemos em tal caso que o pensamento muda; assim, por exemplo, o pensamento da sentença "A estrela da manhã é um corpo iluminado pelo sol" é diferente do da sentença "A estrela da tarde é um corpo iluminado pelo sol". Alguém que não soubesse que a estrela da tarde é a estrela da manhã poderia sustentar um pensamento como verdadeiro e o outro como falso. O pensamento, portanto, não pode ser a referência da sentença pelo contrário, deve ser considerado como seu sentido.

E o que dizer agora a respeito da referência? Podemos, mesmo, formular essa pergunta? É possível que uma sentença como um todo tenha tão-somente um sentido, mas nenhuma referência? De qualquer forma, poder-se-ia esperar que tais sentenças existam, do mesmo modo que há partes de sentenças que possuem sentido, mas que carecem de referência. São desta espécie as sentenças que contêm nomes próprios sem referência. A sentença "Ulisses profundamente adormecido foi desembarcado em Ítaca" tem, obviamente, um sentido. Mas, assim como é duvidoso que o nome "Ulisses", que aí ocorre, tenha uma referência, assim também é duvidoso que a sentença inteira tenha uma. Entretanto, é certo que se alguém tomasse seriamente essa sentença como verdadeira ou falsa, também atribuiria ao nome "Ulisses" uma referência e não somente um sentido; pois é da referência deste nome que o predicado é afirmado ou negado. Todo aquele que não admite que um nome tenha uma referência

30. No presente artigo, Frege trata apenas dos aspectos semânticos dos nomes próprios e sentenças, vale dizer, de expressões completas e saturadas. Mais tarde, em outro trabalho, ele virá a abordar a questão semântica em relação aos termos conceituais (ou nomes conceituais ou expressões predicativas ou nomes comuns), isto é, expressões insaturadas e incompletas. Cf. adiante pp. 159-169 (N. do T.).

31. Entendo por pensamento não o ato subjetivo de pensar, mas seu conteúdo objetivo, que pode ser propriedade comum de muitos.

não lhe pode atribuir nem negar um predicado. Neste caso, a consideração acerca da referência do nome se torna supérflua; já que não se quer ir além do pensamento, poder-se-ia contentar-se com o sentido. Se tudo quanto importa fosse apenas o sentido da sentença, fosse apenas o pensamento, então seria desnecessário preocupar-se com a referência de uma parte da sentença; pois para o sentido da sentença somente importa o sentido desta parte, e não a referência desta parte [da sentença]. O pensamento permanece o mesmo se o nome "Ulisses" tem referência ou não. O fato de que nos preocupamos com a referência de uma parte da sentença indica que admitimos e exigimos uma referência para a própria sentença. O pensamento perde valor para nós tão logo reconhecemos que a referência de uma de suas partes está faltando. Estamos assim justificados por não ficarmos satisfeitos apenas com o sentido de uma sentença, sendo assim levados a perguntar também por sua referência. Mas por que queremos que cada nome próprio tenha não apenas um sentido, mas também uma referência? Por que o pensamento não nos é suficiente? Porque estamos preocupados com seu valor de verdade. O que nem sempre é o caso. Ao ouvir um poema épico, além da eufonia da linguagem, estamos interessados apenas no sentido das sentenças e nas imagens e sentimentos que este sentido evoca. A questão da verdade nos faria abandonar o encanto estético por uma atitude de investigação científica[32]. Daí decorre ser totalmente irrelevante para nós se o nome "Ulisses", digamos, tem referência, contanto que aceitemos o poema como uma obra de arte[33]. É, pois, a busca da verdade, onde quer que seja, o que nos dirige do sentido para a referência[34].

Vimos que a referência de uma sentença pode sempre ser procurada onde a referência de seus componentes esteja envolvida, e isto é sempre o caso quando, e somente quando, estamos investigando seu valor de verdade.

32. A argumentação de Frege equivale a dizer que em contexto, digamos, da ciência e da filosofia (e *a fortiori* de uma conceitografia), pensamentos carentes de valor de verdade e nomes próprios destituídos de referência não têm, em princípio, utilidade (N. do T.).

33. Seria desejável ter um nome especial para aqueles sinais que só devem ter sentido. Se os chamássemos, digamos, de imagens (*Bilder*), então as palavras dos atores no palco seriam imagens e, na verdade, até o próprio ator seria uma imagem. [Cumpre não confundir *Bild*, 'imagem', com *Figur*, 'figura', palavra que Frege utiliza para designar cadeias gráficas ou sonoras que carecem tanto de sentido como de referência. (N. do T.)].

34. No domínio da ficção, as expressões (nomes próprios, termos conceituais e sentenças) carecem normalmente de referência. Mas, em princípio, operam como se tivessem uma. Frege denomina os nomes próprios sem referência, como vimos acima, de 'imagens' (*Bilder*) ou ainda de 'nomes próprios aparentes' (*Scheineigennamen*), e caso se tratem de sentenças, ele as denomina de 'pensamentos aparentes' (*Scheingedanken*). Cf. G. Frege, *Nachgelassene*, p. 141. Mas o fato de um nome próprio ou de uma sentença serem aparentes não significa que não possam ter sentido (N. do T.).

Somos assim levados a reconhecer o *valor de verdade* de uma sentença como sendo sua referência. Por valor de verdade de uma sentença entendo a circunstância de ela ser verdadeira ou falsa. Não há outros valores de verdade. Por brevidade, chamo a um de o verdadeiro e a outro de o falso[35]. Toda sentença assertiva, caso importe a referência de suas palavras, deve ser considerada como um nome próprio; e sua referência, se tiver uma, é ou o verdadeiro ou o falso[36]. Estes dois objetos são reconhecidos, pelo menos tacitamente, por todo aquele que julgue, que considere algo como verdadeiro, até mesmo por um cético. Chamar os valores de verdade de objetos pode parecer um devaneio arbitrário ou talvez um mero jogo de palavras, sem conseqüências profundas. O que eu denomino de objeto só pode ser propriamente discutido quando vinculado ao conceito e à relação. Reservarei isto para um outro artigo[37]. Mas algo deve ficar aqui esclarecido: em todo juízo[38] – mesmo o mais evidente – é dado o passo do plano dos pensamentos para o plano das referências (do objetivo).

Alguém poderia ser levado a conceber a relação do pensamento com o verdadeiro não como a do sentido com a referência, mas como a do sujeito com o predicado[39]. De fato, poder-se-ia dizer: "O pensamento de que 5 é um número primo é verdadeiro". Porém, um exame mais acurado mostra que essa sentença nada acrescenta ao que é dito na simples sentença "5 é um número primo". A asserção da verdade reside, em ambos os casos, na forma da sentença assertiva. E quando a asserção não mais tem sua força usual, digamos, na boca de um ator no palco, mesmo a sentença "O pensamento de que 5 é um número primo é verdadeiro" contém apenas um pensamento, a saber, o mesmo pensamento da simples sentença "5 é um número primo". Disto se segue que a relação do pensamento com o verdadeiro não pode ser comparada com a

35. Portanto, todas as sentenças assertivas verdadeiras têm o mesmo referente (o verdadeiro) e todas as sentenças assertivas falsas têm também o mesmo referente (o falso). Assim, Frege só reconhece dois referente sentenciais. Ele vai além e toma o verdadeiro e o falso (isto é, os valores de verdade) como objetos, na acepção em que ele empresta a esta palavra. Com esses dois objetos se resolve a questão da referência das sentenças assertivas (N. do T.).
36. Esta teoria implica, como se vê, que todas as sentenças de conteúdos os mais diversos, se tiverem o mesmo valor de verdade, terão a mesma referência (N. do T.).
37. Frege uma vez mais remete ao seu artigo 'Sobre o Conceito e o Objeto' (N.do T.).
38. Um juízo para mim não é a mera apreensão de um pensamento, mas o reconhecimento de sua verdade.
39. Na verdade, Frege rejeita não só a análise tradicional da sentença em sujeito e predicado, como também essas próprias palavras. Em seu entender, tais equívocos poderiam ser sanados se tais noções fossem substituídas pelas de função e argumento. Aqui, porém, o que se discute é se a relação entre pensamento e valor de verdade é ou não do mesmo gênero da relação que se dá entre sujeito e predicado (N. do T.).

relação entre sujeito e predicado[40]. Sujeito e predicado (tomados em sentido lógico) são, de fato, partes do pensamento. Mas, no que tange ao conhecimento, eles estão no mesmo nível. Combinando-se sujeito e predicado, elabora-se apenas um pensamento; nunca se passa de um sentido para sua referência, ou de um pensamento para seu valor de verdade. Move-se no mesmo nível, e nunca se avança de um nível para o outro. Um valor de verdade não pode ser uma parte de um pensamento, como tampouco pode ser o sol, posto que um valor de verdade não é um sentido, mas um objeto.

Se nossa suposição é correta, de que a referência de uma sentença é seu valor de verdade, então este tem de permanecer inalterado, se uma parte da sentença for substituída por uma expressão que tenha a mesma referência, ainda que sentido diverso. E isto é, de fato, o que ocorre. Leibniz[41] assim o explica: "*Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate*"[42]. Que mais, senão o valor de verdade, poderia ser encontrado, que pertença de modo muito geral a toda sentença onde as referências de seus componentes são levadas em conta, e que permaneça inalterado pelas substituições do tipo mencionado [pelo princípio de Leibniz]?

Se o valor de verdade de uma sentença é sua referência, então, de um lado, todas as sentenças verdadeiras têm a mesma referência e, de outro, o mesmo ocorre com todas as sentenças falsas. Vemos, a partir disso, que na referência da sentença tudo que é específico é desprezado. Nunca devemos, pois, nos ater apenas à referência de uma sentença. Mas, por outro lado, o pensamento, isoladamente, não nos confere conhecimento algum, mas somente o pensamento associado à sua referência, isto é, ao seu valor de verdade[43].

40. Frege rejeita aqui que o verdadeiro ou o falso, os valores de verdade, possam contribuir, sem qualquer qualificação, para a asserção da verdade da sentença ou do pensamento. Cf. G. Frege, *Investigações Lógicas*, Porto Alegre, EDIPUCRS, p.12 (N.do T.).

41. Em outras palavras, 'são iguais os termos que podem ser substituídos uns pelos outros, desde que se conserve o mesmo valor de verdade'. Nos *Fundamentos da Aritmética*, § 65, Frege cita ainda o que seria uma outra versão do mesmo princípio: *eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*. Em Leibniz encontramos ainda a seguinte formulação: *eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate, ut Triangulum et Trilaterum, Quadrangulum et Quadrilaterum*. Leibniz, *Philos. Schriften*, VII, pp. 219, 228, ed. C.I. Gerhardt. O que este princípio expressa entrou para a lógica sob a rubrica de 'princípio da substituição *salva veritate*' (N. do T.).

42. Sobre a expressão '*salva veritate*' em Leibniz e na lógica moderna, cf. R. Kauppi, 'Über die Leibnizsche Logik', *Acta Philosophica Fennica*, 12 (1960), p. 262 (N. do T.).

43. Cumpre distinguir asseribilidade de um pensamento de sua inteligibilidade. Um pensamento pode ser plenamente inteligível (ou compreensível) sem que isso implique que deva ser asserido, isto é, tomado como verdadeiro (N. do T.).

O juízo pode ser encarado como um movimento de um pensamento para seu valor de verdade. Evidentemente que isso não pode ser tomado como uma definição. O julgar é na verdade algo totalmente peculiar e único. Poder-se-ia dizer que julgar consiste em distinguir partes dentro do valor de verdade[44]. Essa distinção se realiza por uma volta ao pensamento. A cada sentido a que corresponda um valor de verdade, deveria corresponder uma certa maneira de dividir o valor de verdade. Tenho, porém, empregado aqui a palavra "parte" de um modo peculiar: transferi a relação entre todo e parte da sentença para sua referência. Isto o fiz ao conceber a referência de uma palavra como parte da referência de uma sentença, quando a própria palavra é parte da sentença. Certamente, essa maneira de falar é discutível, porque, no que diz respeito à referência, o conhecimento do todo e de uma de suas partes não determina a outra parte, e também porque a palavra parte, quando aplicada aos corpos, é empregada em outro sentido. Uma expressão especial precisaria ser inventada [para o uso que aqui fizemos].

A suposição de que o valor de verdade de uma sentença é sua referência será agora submetida a outro exame[45]. Estabelecemos que o valor de verdade de uma sentença permanece inalterado quando uma de suas expressões for substituída por outra de mesma referência. Mas ainda não consideramos o caso em que a expressão a ser substituída é, ela mesma, uma sentença. Se nossa concepção for correta, o valor de verdade de uma sentença, que contenha uma outra como parte, deve permanecer inalterado quando substituirmos a sentença componente por outra sentença que tenha o mesmo valor de verdade. Exceções [a este princípio] devem ser, contudo, esperadas se a sentença inteira ou a sentença componente estiver em discurso direto[46] ou indireto; caso em que, como vimos, as palavras não têm suas referências costumeiras. Em discurso direto, uma sentença se refere a uma outra sentença, e em discurso indireto se refere a um pensamento.

44. Julgar (um pensamento) vem a ser distinguir quais dos valores de verdade – o verdadeiro ou o falso – é o caso em relação a esse pensamento (N. do T.).
45. Frege nos diz que em princípio a referência de uma sentença é um valor de verdade. Mas, há quatro tipos de exceções, por assim dizer, que ele a seguir examina (N. do T.).
46. Na verdade, a expressão 'discurso direto' que aqui reaparece não se compatibiliza com o que Frege anteriormente explicou a seu respeito (cf. p. 133-134). Por tal razão, melhor seria em lugar de 'discurso direto' usar 'citação direta', como o fizeram P. Geach e M. Black, *Translations*, p. 65. Em nossa tradução, como se vê, não nos desviamos do original alemão e assim persiste esta dificuldade em toda a sua extensão (N. do T.).

Somos, desse modo, levados a considerar as sentenças subordinadas[47]. Estas ocorrem como parte de uma sentença composta, que, do ponto de vista lógico, é também uma sentença, a saber, uma sentença independente. Mas agora deparamo-nos com a questão de se também no caso das sentenças subordinadas é válido que suas referências sejam valores de verdade. No discurso indireto, já sabemos que tal não se dá. Os gramáticos consideram as sentenças subordinadas como partes de sentenças e dividem-nas, conseqüentemente, em sentenças substantivas, adjetivas e adverbiais[48]. Essa divisão das sentenças poderia ensejar que a referência de uma sentença subordinada não fosse um valor de verdade, mas algo que fosse similar à referência de um substantivo ou de um adjetivo ou de um advérbio, em resumo, algo que fosse similar à referência de uma parte da sentença cujo sentido não é um pensamento, mas apenas parte de um pensamento. Somente uma investigação mais completa pode esclarecer esse problema. Neste sentido, não seguiremos estritamente as diretrizes gramaticais, mas agruparemos o que é logicamente da mesma espécie[49]. Examinaremos, inicialmente, os casos em que o sentido da sentença subordinada, como acabamos de supor, não é um pensamento independente.

Às sentenças substantivas abstratas (*abstrakten Nennsätzen*) introduzidas pelo "que" pertencem também as sentenças em discurso indireto. E vimos que, as palavras [de uma sentença em discurso indireto] têm uma referência indireta, que coincide com o que é, costumeiramente, o seu sentido costumeiro[50].

47. O estudo da sentença subordinada ocupa mais da metade do presente artigo. Aparentemente, duas são as razões para este fato: i) mostrar a generalidade e validade de sua teoria semântica; e ii) justificar sua teoria da sentença com respeito ao princípio da substituição (N. do T.).

48. Frege segue proximamente aqui a divisão tripartite das sentenças complexas, então em voga entre os gramáticos alemães, em substantiva (*Nennsatz*), adjetiva (*Beisatz*) e adverbial (*Adverbsatz*). N. do T.

49. Os critérios taxionômicos de Frege são critérios semânticos. Sendo assim, as sentenças subordinadas são agrupadas consoante suas possíveis classes de referentes, quais sejam:1) valores de verdade (referência direta de sentenças principais e de algumas subordinadas), 2) objetos individuais, 3) conceitos (referência direta de algumas subordinadas) e 4) pensamentos (referência indireta). Levando-se em conta o que acabamos de dizer, podem-se distinguir, na classificação das sentenças subordinadas, quatro espécies de sentenças (N. do T.).

50. As sentenças subordinadas da primeira espécie têm referência indireta das palavras ou, em outros termos, estão em contexto oblíquo. Tais sentenças têm por referência, não valores de verdade, mas o que, em discurso direto, seria seu sentido. Por exemplo, embora 'Scott é o autor de *Waverley*' e 'Scott é Scott' possuam idênticos valores de verdade, o verdadeiro, as sentenças complexas 'George IV quis saber se Scott era o autor de *Waverley*' e 'George IV quis saber se Scott era Scott' possuem valores de verdade distintos. De fato, a primeira das sentenças complexas acima é verdadeira; sua sentença subordinada tem por referência o pensamento de que Scott é o autor de *Waverley*, do qual se afirma que George IV queria saber de sua veracidade ou não. Quanto à segunda de tais sentenças, de certo é falsa, pois, citando Russell, 'um interesse pela lei de identidade dificilmente pode ser atribuído ao primeiro cavalheiro da Europa'. B. Russell, 'On Denoting' (N. do T.).

Neste caso, a sentença subordinada tem como referência um pensamento, e não um valor de verdade; como sentido, não um pensamento, mas o sentido das palavras "o pensamento de que...", e este sentido é apenas uma parte do pensamento da sentença composta como um todo. Isso ocorre depois de "dizer", "ouvir", "pensar", "estar convencido", "inferir" e palavras similares[51]. A situação é diferente e, na verdade, bastante complicada, depois de palavras como "reconhecer", "saber", "supor" e outras, que serão consideradas mais tarde.

Que nesses casos a referência da sentença subordinada é de fato o pensamento pode também ser visto pelo fato de que, para a verdade do todo, é indiferente se tal pensamento é verdadeiro ou falso. Comparem-se, por exemplo, as duas sentenças "Copérnico acreditava que as órbitas planetárias eram circulares" e "Copérnico acreditava que o movimento aparente do sol era produzido pelo movimento real da terra". Pode-se aqui substituir uma sentença subordinada por outra, sem prejuízo da verdade. A sentença principal, juntamente com a sentença subordinada, têm como sentido apenas um único pensamento, e a verdade do todo não implica nem a verdade nem a não-verdade da sentença subordinada. Nos exemplos acima, não é permitido substituir na sentença subordinada uma expressão por outra que tenha a mesma referência costumeira; pode-se apenas substituí-la por outra que tenha a mesma referência indireta, isto é, o mesmo sentido costumeiro. Se alguém inferisse que a referência de uma sentença não é seu valor de verdade – porque, se assim fosse, sempre se poderia substituí-la por outra de mesmo valor de verdade – teria provado demais. Pois, com igual direito, poder-se-ia alegar que a referência da expressão "estrela da manhã" não é Vênus, pois nem sempre se pode dizer "Vênus" em lugar de "estrela da manhã". Aqui, a única conclusão legítima é que a referência de uma sentença *nem sempre* é seu valor de verdade, e que "estrela da manhã" nem sempre se refere ao planeta Vênus, a saber, [não se refere] quando "estrela da manhã" tem sua referência indireta. Tal caso excepcional ocorre nas sentenças subordinadas que acabamos de examinar, pois sua referência é um pensamento.

Quando se diz "parece que...", o que se quer dizer é "parece-me que..." ou "penso que..." . Temos aqui o mesmo caso anterior. O mesmo se dá também com expressões como "alegrar-se", "lamentar", "consentir", "desaprovar", "ter esperança", "temer". Se Wellington, próximo ao final da batalha de Waterloo, se alegrasse porque os prussianos estavam por chegar, a base de sua alegria seria

51. Em "*A* mentiu ao dizer que tinha visto *B*", a sentença subordinada refere-se a um pensamento do qual é dito, primeiramente, que *A* o asseriu como verdadeiro e, em segundo lugar, que *A* estava convencido de sua falsidade.

uma convicção. Tivesse sido enganado, sua alegria não teria sido menor enquanto durasse sua ilusão e, antes de se convencer de que os prussianos estavam chegando, ele não poderia se alegrar por este fato, mesmo que os prussianos efetivamente já se aproximassem.

Assim como uma convicção ou uma crença pode ser a base de um sentimento, elas podem também ser a base de uma outra convicção, como se dá na inferência. Assim, na sentença "Colombo inferiu da redondeza da terra que poderia alcançar a Índia viajando em direção ao oeste", temos como referência das [duas] partes dois pensamentos: o pensamento de que a terra é redonda e o pensamento de que Colombo viajando para oeste poderia alcançar a Índia. Aqui se enunciam as duas convicções de Colombo, e que uma convicção era a base da outra. Que a terra fosse realmente redonda e que Colombo pudesse realmente alcançar a Índia viajando para oeste, como ele acreditava, é irrelevante para a verdade de nossa sentença. Mas não é irrelevante se substituímos "a terra" por "o planeta acompanhado de uma lua cujo diâmetro é superior à quarta parte do seu". Pois também aqui as palavras têm a referência indireta.

Ainda pertencem a esse caso as sentenças adverbiais finais introduzidas por "a fim de que", pois, evidentemente, a finalidade é um pensamento; donde a referência indireta das palavras, manifestada pelo modo subjuntivo [como tempo verbal].

A sentença subordinada começando com "que" depois de "ordenar", "pedir", "proibir", se enunciada em discurso direto, seria um imperativo. Uma tal sentença [subordinada] não tem referência, mas apenas sentido. Uma ordem ou um pedido não são, na realidade, pensamentos, ainda que estejam no mesmo nível dos pensamentos. Donde as palavras que ocorrem nas sentenças subordinadas que dependem de "ordenar", "pedir" etc. terem referências indiretas. A referência de tais sentenças subordinadas não é, por isso, um valor de verdade, mas uma ordem, um pedido, e assim por diante.

O caso é semelhante para as interrogativas indiretas após expressões como "duvidar que", "não saber que". É fácil ver também aqui que as palavras têm que ser tomadas em suas referências indiretas. As sentenças subordinadas interrogativas indiretas começando por "quem", "o que", "onde", "quando", "como", "por que meio" etc. às vezes aparentemente se assemelham muito às sentenças subordinadas adverbiais em que as palavras têm sua referência costumeira. Lingüisticamente, esses [dois] casos são distinguidos através do modo do verbo[52]. Se ele estiver no subjuntivo, temos uma subordinada interro-

52. Note-se que, no português, a distinção através do modo do verbo não se dá como no alemão (N. do T.).

gativa indireta, e a referência das palavras é indireta, de modo que um nome próprio não pode, em geral, ser substituído por outro nome do mesmo objeto.

Nos casos até aqui considerados, as palavras das sentenças subordinadas tinham uma referência indireta, e esse fato explica por que a referência da própria sentença subordinada era também indireta, a saber, porque sua referência não era um valor de verdade, mas um pensamento, uma ordem, um pedido, uma pergunta. A sentença subordinada poderia ser interpretada como tendo a força de um nome, e poderíamos mesmo dizer que ela é um nome próprio desse pensamento, dessa ordem etc. que ela representa no contexto da sentença composta.

Passemos agora para outras sentenças subordinadas nas quais as palavras têm suas referências costumeiras sem ter, contudo, um pensamento como sentido, nem um valor de verdade como referência[53]. Como isto é possível, é melhor esclarecer através de exemplos.

"Quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias
morreu na miséria."

Se o sentido da sentença subordinada fosse aqui um pensamento, seria possível expressá-lo também através de uma sentença independente. Mas isto é infactível, uma vez que o sujeito gramatical "quem" não tem um sentido independente, pois apenas medeia a relação com a sentença conseqüente "morreu na miséria". Por isso o sentido da sentença subordinada não é um pensamento completo, e sua referência não é um valor de verdade, mas Kepler. Poder-se-ia objetar que o sentido do todo contém um pensamento como parte, qual seja, de que houve alguém que primeiro descobriu a forma elíptica das órbitas

53. As sentenças subordinadas da segunda espécie são aquelas em que ocorre um *indicador indefinido*, e como tal referem-se a objetos ou a conceitos. É o caso de (1) '*Quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias* morreu na miséria'; (2) '*Quem toca em piche*, se suja'. Nessas sentenças ocorre um indicador indefinido – no caso, 'quem' – que corresponde ao que em lógica se denomina 'variável'. Podemos, portanto, reescrever as sentenças acima da seguinte maneira (1) 'A pessoa *x* que descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias morreu na miséria'; (2) 'Qualquer que seja a pessoa *x*, se *x* toca em piche, *x* se suja'. Na sentença (1), a sentença subordinada 'quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias' é um nome próprio composto (ou descrição definida), isto é, um predicado que se aplica a um e somente um indivíduo. Refere-se ao indivíduo concreto, cujo nome é 'Kepler'. Na sentença (2), a sentença subordinada 'quem toca em piche' é uma expressão conceitual, isto é, um predicado que se aplica eventualmente a um número indefinido de indivíduos. Tal sentença pode ser expressa por uma sentença condicional, 'Se alguém toca em piche, então se suja'. Nenhuma das duas sentenças consideradas tem como sentido um pensamento e como referência um valor de verdade, pois falta-lhes um sujeito independente. Logo, não podem ter o sentido reproduzido numa sentença independente (N. do T.).

planetárias. Pois quem tomar o todo como verdadeiro não pode negar essa parte. Isso é inquestionável, mas somente porque, de outro modo, a sentença subordinada "quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias" não teria referência. Se algo é asserido, pressupõe-se obviamente que os nomes próprios usados, simples ou compostos, têm referência. Assim, ao se asserir que "Kepler morreu na miséria", pressupõe-se que o nome "Kepler" designa algo. Contudo, disso não se segue que o sentido da sentença "Kepler morreu na miséria" encerre o pensamento de que o nome "Kepler" designa alguma coisa. Se esse fosse o caso, a negação dessa sentença não seria

"Kepler não morreu na miséria",

mas

"Kepler não morreu na miséria, ou o nome 'Kepler' carece de referência".

Aliás, que o nome "Kepler" designa algo é uma pressuposição tanto da asserção

"Kepler morreu na miséria"

como da asserção contrária.

As linguagens naturais têm o defeito de que nelas podem-se originar expressões que, por sua forma gramatical, parecem destinadas a designar um objeto, mas que em casos especiais não o designam, posto que isso depende da verdade de uma [outra] sentença. Assim, da verdade da sentença

"Houve alguém que descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias"

depende se a sentença subordinada

"quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias"

realmente designa um objeto, ou se apenas parece designá-lo, embora de fato a nada se refira. E assim poderia parecer que nossa sentença subordinada contivesse, como parte de seu sentido, o pensamento de que houve alguém que descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias. Se tal for o caso, a negação da sentença seria

"Quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias
não morreu na miséria, ou não houve alguém que descobriu
a forma elíptica das órbitas planetárias"[54].

Tal equívoco surge de uma imperfeição da linguagem, da qual nem mesmo a linguagem simbólica da Análise matemática está totalmente isenta. Nesta podemos encontrar combinações de símbolos que parecem referir-se a algo mas que não têm, pelo menos até o presente, qualquer referência, por exemplo as séries infinitas divergentes[55]. Isto pode ser sanado, digamos, por meio da convenção de que as séries infinitas divergentes devam referir-se ao número 0[56]. Numa linguagem logicamente perfeita (uma *conceitografia*), deve-se exigir que toda expressão construída como um nome próprio de maneira gramaticalmente correta a partir de sinais previamente introduzidos designe efetivamente um objeto, e que nenhum sinal seja introduzido como nome próprio sem que lhe seja assegurada uma referência. Nos manuais de lógica, aponta-se a ambigüidade das expressões como uma fonte de erros lógicos. Considero igualmente oportuno se precaver contra os nomes próprios aparentes carentes de toda referência. A história da matemática narra erros que se originaram dessa maneira. O abuso demagógico se apoia facilmente sobre isto, talvez mais facilmente do que sobre a ambigüidade das palavras. "A vontade do povo" pode servir de exemplo, pois é fácil mostrar que não há uma referência universalmente reconhecida para essa expressão. Não deixa, pois, de ser importante que se elimine definitivamente a fonte desses erros, ao menos na ciência. Assim, objeções como a que anteriormente consideramos se tornariam impossíveis, pois não mais dependerá da verdade de um pensamento o fato de um nome próprio ter ou não uma referência.

Após essas considerações sobre as sentenças substantivas, podemos examinar um gênero de sentenças adjetivas (*Beisätze*) e adverbiais (*Adverbsätze*), que estão em estreito relacionamento lógico com as sentenças substantivas.

54. Se dissermos que uma sentença da forma 'Platão é grego' encerra ou implica a sentença 'o nome "Platão" tem referente', teremos que admitir que a negação de 'Platão é grego' não é 'Platão não é grego', mas 'Ou Platão não é grego ou o nome "Platão" não tem referente'. Esse raciocínio também se aplica às descrições definidas (N. do T.).

55. Cf. cap. 5, n. 46 (N. do T.).

56. Cf. ainda os *Grundgesetze*, I, § 11. Um artifício similar não é por Frege previsto para o caso de nomes destituídos de sentido. Em seu entender, ao que parece, não se dá o caso em que um nome se refira a seu referente sem expressar um sentido (N. do T.).

Algumas sentenças adjetivas também servem para formar nomes próprios compostos[57], embora, ao contrário das sentenças substantivas, elas não o consigam isoladamente. Essas sentenças adjetivas devem ser consideradas equivalentes a adjetivos. Em vez de "a raiz quadrada de 4 que é menor do que 0", pode-se também dizer "a raiz quadrada negativa de 4". Temos aqui o caso de um nome próprio composto construído a partir de uma expressão conceitual e com o auxílio do artigo definido singular, o que é sempre permissível quando um objeto e somente um cai sob o conceito[58]. Expressões conceituais podem ser formadas de tal modo que as notas (*Merkmale*) do conceito sejam dadas através de sentenças adjetivas, como no nosso exemplo, onde uma nota é dada através da sentença "que é menor do que 0". Evidentemente tal sentença adjetiva não pode ter um pensamento como sentido ou um valor de verdade como referência, tal como a sentença substantiva também não o pode ter. Seu sentido é apenas uma parte de um pensamento que também pode, em muitos casos, ser expresso por um único adjetivo.Também aqui, como no caso das sentenças subordinadas substantivas, falta um sujeito independente e, portanto, nenhuma possibilidade há de reproduzir o sentido da sentença subordinada numa sentença independente.

Lugares, instantes, intervalos de tempo são, sob o ponto de vista lógico, considerados objetos; e portanto a designação lingüística de um lugar determinado, de um instante determinado ou de um intervalo de tempo determinado deve ser considerada um nome próprio. As sentenças adverbiais de lugar e de tempo podem, pois, ser usadas para a formação de tais nomes próprios, de maneira semelhante à que acabamos de ver no caso das sentenças substantivas e adjetivas. Da mesma maneira podem ser formadas as expressões conceituais que compreendem circunstâncias de lugar etc. Deve-se também notar que o sentido dessas sentenças subordinadas não pode ser expresso por uma sentença independente, pois falta à subordinada um componente essencial, a saber, a determinação de lugar ou de tempo, que não é dada mas apenas indicada por um pronome relativo ou por uma conjunção[59].

57. Frege denomina de 'nome próprio composto' (*zusammengesetzt Eigenname*) não um nome plurivocabular do tipo 'Santo Tomás de Aquino', mas algo como 'O autor da *Suma Teológica*', isto é, aquilo que B. Russell veio mais tarde a chamar de 'descrição definida' (N. do T.).

58. De acordo com as observações acima, uma tal expressão deve sempre ter assegurada uma referência por meio de uma convenção especial, por exemplo de que sua referência será o número 0 se nenhum objeto, ou mais de um, cai sob o conceito.

59. No que tange a essas sentenças, outras interpretações são igualmente possíveis. O sentido da sentença "Depois que o Schleswig-Holstein se separou da Dinamarca, a Prússia e a Áustria se desentenderam"

Nas sentenças condicionais[60], tal como vimos nas sentenças substantivas, adjetivas e adverbiais, geralmente há que se admitir um indicador indefinido ao qual corresponde um outro similar na sentença conseqüente. Estes indicadores, na medida em que um remete ao outro, unem as duas sentenças [isto é, a antecedente e a conseqüente] em um todo que, de maneira geral, expressa um único pensamento. Na sentença

"Se um número é menor que 1 e maior do que 0, então seu quadrado também é menor que 1 e maior do que 0",

esse indicador [indefinido] é "um número" na sentença antecedente e "seu" na sentença conseqüente[61]. É por meio dessa indefinição que o sentido adquire a generalidade que se espera de uma lei. Desta definição também decorre que a sentença antecedente, isoladamente, não tem como sentido um pensamento completo e que, em combinação com a sentença conseqüente, expressa um único pensamento, cujas partes não são pensamentos. É, em geral, incorreto dizer que no juízo[62] hipotético dois juízos se inter-relacionam. Se isto ou algo semelhante é dito, usa-se a palavra "juízo" no mesmo sentido que associei à palavra "pensamento". O que cabe ser dito é que "num pensamento hipotéti-

pode ser expresso sob a forma "Depois da separação do Schleswig-Holstein da Dinamarca, a Prússia e a Áustria se desentenderam". Segundo essa interpretação, é suficientemente claro que não deve ser tomado como uma parte desse sentido o pensamento de que o Schleswig-Holstein se separou um dia da Dinamarca, mas pelo contrário, que esse pensamento é a pressuposição necessária para que a expressão "depois da separação do Schleswig-Holstein da Dinamarca" tenha uma referência. Além disso, nossa sentença pode ser interpretada também como dizendo que o Schleswig-Holstein se separou um dia da Dinamarca. Temos aqui um caso a ser considerado posteriormente. A fim de compreendermos mais claramente a diferença, imaginemo-nos na mente de um chinês que, tendo pouco conhecimento da história européia, acredita ser falso que o Schleswig-Holstein tenha alguma vez se separado da Dinamarca. Ele irá tomar nossa sentença, em sua primeira versão, como não sendo nem verdadeira nem falsa, e negará que ela tenha qualquer referência, baseado na ausência de referência para sua sentença subordinada. Esta última sentença só daria, aparentemente, uma indicação temporal. Se ele, entretanto, interpretasse nossa sentença da segunda maneira, então encontraria um pensamento nela expresso, que ele consideraria falso, além de uma parte que, para ele, careceria de referência.

60. Entenda-se especificamente o antecedente de uma sentença condicional. Como era corrente em sua época, Frege chama de 'sentença condicional'(*Bedingungssatze*) tanto uma sentença da forma 'Se *A*, então *B*' como sua sentença antecedente '*A*'. Como tal terminologia pode vir a provocar equívocos, por não mais ser observada na atualidade, aqui sempre que for o caso procuraremos distinguir explicitamente esses dois aspectos (N. do T.).

61. Cf. cap. 7, n. 53, p. 145 (N. do T.).

62. Frege nos lembra aqui que sua utilização da palavra 'juízo' (*Urteil*) é mais restrita que a dos lógicos alemães de seu tempo (cf. supra p. 100, n. 50), para os quais esta palavra significa de maneira geral "sentença" ou "proposição" assertóricas e, por tal razão, estando próxima de 'pensamento' quando esta última é tomada em acepção fregeana (N. do T.).

co dois pensamentos se inter-relacionam." Isto porém só pode ser verdadeiro quando a sentença não contiver nenhum indicador indefinido[63], mas, neste caso, ela é destituída de toda generalidade.

Quando um instante de tempo tem de ser indicado indefinidamente tanto na sentença antecedente como na conseqüente, isto é feito freqüentemente pelo simples uso do *tempus praesens*[64] do verbo que, neste caso, não indica o presente temporal. Essa forma gramatical desempenha o papel do indicador indefinido na sentença principal e na subordinada. Um exemplo disso é "Quando o sol se encontra no Trópico de Câncer, ocorre o dia mais longo do hemisfério norte". Também aqui é impossível expressar o sentido da sentença subordinada mediante uma sentença independente, porque esse sentido não é um pensamento completo. Se disséssemos: "O sol se encontra no Trópico de Câncer", estaríamos nos referindo ao nosso presente e, portanto, o sentido da sentença mudaria. Menos ainda é o sentido da sentença principal um pensamento[65]. Somente o todo, contendo as sentenças principal e subordinada, encerra um pensamento. Além do mais, também se podem indicar indefinidamente vários componentes comuns às sentenças antecedente e conseqüente [de uma condicional].

É claro que sentenças substantivas com "quem" ou "que" e sentenças adverbiais com "onde", "quando", "onde quer que", "sempre que" devem ser freqüentemente interpretadas como tendo o sentido de sentenças condicionais; por exemplo: "Quem toca em piche, se suja".

As sentenças adjetivas também podem ser interpretadas como desempenhando o papel de antecedentes de sentenças condicionais. Assim, o sentido da sentença previamente mencionada pode também ser expresso pela forma "O quadrado de um número que é menor que 1 e maior do que 0, é menor que 1 e maior do que 0".

A situação é totalmente diferente [dos casos anteriores] se o componente comum da sentença principal e da sentença subordinada for designado por um nome próprio[66]. Na sentença:

63. Às vezes, falta uma indicação lingüística explícita, devendo ela ser depreendida do contexto.
64. É uma expressão técnica usada pelos lógicos tradicionais para qualificar a cópula que embora enunciada lingüisticamente no presente do indicativo, não deve ser contudo interpretada como uma verdade apenas em um certo momento; mas como uma verdade intemporal. Tal é a interpretação que se aplica às constantes lógicas, como em '$x \in y$' ou '$p \rightarrow q$' (N. do T.).
65. Segundo Frege temos, no exemplo acima, uma implicação formal e desse modo só a sentença como um todo expressa um pensamento. Aqui, a quantificação se dá sobre a variável temporal (N. do T.)
66. As sentenças subordinadas da terceira espécie exprimem pensamentos completos e, conseqüentemente, referem-se a valores de verdade. É o caso de 'Os cães ladram, e a caravana passa'. A cada uma de suas sentenças, a inicial e a coordenada, correspondem, como sentido, um pensamento, e como

"Napoleão, que reconheceu o perigo para seu flanco direito, comandou pessoalmente sua guarda contra a posição inimiga",

dois pensamentos foram expressos:

1. Napoleão reconheceu o perigo para seu flanco direito.
2. Napoleão comandou pessoalmente sua guarda contra a posição inimiga.

Quando e onde tudo isso aconteceu, só pelo contexto pode-se saber, mas tais circunstâncias devem ser consideradas como definidas por esse contexto. Se a sentença total é proferida como uma asserção, asserem-se simultaneamente ambas as suas sentenças componentes. Se uma das componentes for falsa, o todo é falso. Temos aqui o caso em que a sentença subordinada tem, por si mesma, um pensamento completo como sentido (se a completamos com indicações de lugar e tempo). A referência da sentença subordinada é, conseqüentemente, um valor de verdade. E assim, podemos esperar que ela possa ser substituída, sem prejuízo para o valor de verdade do todo, por uma sentença que tenha o mesmo valor de verdade. E tal é o que ocorre. Mas, deve-se observar que, por motivos puramente gramaticais, seu sujeito tem que ser "Napoleão", pois somente assim ela pode assumir a forma de uma sentença adjetiva atribuída a "Napoleão". Mas se a exigência quanto à forma da proposição for abandonada, e se a conexão for estabelecida pelo "e", então essa restrição desaparece.

As sentenças subordinadas introduzidas por "embora" também expressam pensamentos completos. Esta conjunção não tem propriamente nenhum sentido e tampouco altera o sentido da sentença, mas apenas o ilumina com um matiz peculiar[67]. Podemos realmente, sem prejuízo da verdade do todo, substituir a sentença concessiva por uma outra de mesmo valor de verdade; mas o matiz poderia então parecer um tanto inapropriado, como se uma canção de tema triste fosse cantada alegremente.

referência, um valor de verdade. Pela tabela de verdade da conjunção, sabemos que uma sentença conjuntiva é verdadeira se e somente se cada uma das sentenças que a compõem for igualmente verdadeira, independentemente do pensamento que expresse. Portanto, supondo-se que a sentença acima seja verdadeira, posso substituir tanto a sentença inicial como a sentença coordenada por outra igualmente verdadeira, sem que o valor de verdade do todo sofra alteração. Por exemplo: 'Os cães ladram e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos' (N. do T).

67. Algo similar ocorre com "mas" e "ainda que".

Nos últimos casos analisados, a verdade do todo pressupunha a verdade das sentenças componentes. O caso é diferente se uma sentença condicional expressa um pensamento completo e contém, em lugar de um indicador indefinido, um nome próprio ou uma expressão que possa ser considerada como um nome próprio. Na sentença

"Se o sol já nasceu, o céu está muito nublado",

o tempo é o presente, portanto, definido. Também o lugar deve ser considerado definido. Aqui, pode-se dizer que uma relação foi estabelecida entre os valores de verdade da sentença antecedente e da sentença conseqüente, a saber, que não se dê o caso em que a sentença antecedente se refira ao verdadeiro e a sentença conseqüente se refira ao falso. Assim sendo, a sentença total é verdadeira, quer não tenha o sol ainda nascido, esteja o céu nublado ou não, quer tenha o sol já nascido e o céu esteja muito nublado. Posto que aqui só estão em questão os valores de verdade, cada sentença componente pode ser substituída por outra de mesmo valor de verdade, sem mudar o valor de verdade do todo. Naturalmente, também aqui os matizes de que anteriormente falamos pareceriam com freqüência inadequados: o pensamento poderia parecer absurdo, mas isto nada tem a ver com seu valor de verdade. Deve-se nesses casos ficar atento para os pensamentos secundários (*Nebengedanken*) não explicitamente expressos associados ao pensamento principal, e que não devem ser levados em conta ao se determinar o sentido da sentença total, e assim não cabe se preocupar com seu valor de verdade[68].

Os casos simples foram portanto discutidos. Façamos agora uma retrospectiva do que foi investigado[69].

A sentença subordinada tem, na maior parte das vezes, como sentido, não um pensamento, mas apenas uma parte do pensamento, e conseqüentemente, nenhum valor de verdade como referência. A razão disso é que ou bem as palavras da sentença subordinada têm apenas referência indireta, de modo que é a referência [indireta] da subordinada, e não o seu sentido, que constitui um pensamento, ou bem a sentença subordinada, por conter um indicador indefinido, é incompleta e só expressa um pensamento quando associada à

68. Poder-se-ia também expressar o pensamento da sentença assim: "ou o sol ainda não nasceu, ou o céu está muito nublado". O que mostra como deve ser entendido esse tipo de nexo sentencial.

69. No parágrafo a seguir, Frege passa em retrospectiva os três casos que ele anteriormente examinara (N. do T.).

sentença principal. Porém, casos existem em que o sentido da sentença subordinada é um pensamento completo, e ela então pode ser substituída por outra de mesmo valor de verdade sem afetar o valor de verdade do todo, desde que não haja nenhum impedimento gramatical.

Ao examinar todas as sentenças subordinadas que possamos encontrar, logo nos depararemos com algumas que não se ajustam nas classificações precedentes[70]. A razão disso, tanto quanto eu possa ver, é que essas sentenças subordinadas não têm um sentido tão simples. Quase sempre, ao que parece, aos pensamentos principais (*Hauptgedanken*) que expressamos associamos pensamentos secundários (*Nebengedanken*)[71] que, embora não expressos, são

70. Há ainda o caso em que a sentença subordinada possui duplo sentido e, conseqüentemente, dupla referência – que constitui a quarta espécie de sentenças discutidas por Frege. No que tange a tais sentenças, duas são as possibilidades: (1) A sentença subordinada possui referência direta e referência indireta das palavras (refere-se a um valor de verdade e a um conceito); (2) A sentença subordinada possui dupla referência direta (refere-se, *de um lado*, a um valor de verdade e, *de outro*, a um objeto ou a um conceito). Como exemplo da primeira possibilidade, temos: 'Ao aportar em San Salvador, Colombo imaginou que tivesse alcançado o Extremo Oriente'. A sentença subordinada 'que tivesse alcançado o Extremo Oriente' tem dupla referência: uma referência indireta e uma referência direta. Refere-se, por um lado, ao pensamento de que Colombo tivesse alcançado o Extremo Oriente, do qual se diz que Colombo o supunha verdadeiro. Do fato de que, tendo navegado para o Ocidente, Colombo acreditasse ter alcançado o Extremo Oriente, posso inferir que Colombo acreditava, igualmente, que a terra fosse redonda. Ora, na sentença acima, não posso substituir a sentença subordinada 'que tivesse alcançado o Extremo Oriente' pela expressão 'que a terra fosse redonda'. Daí se infere que a sentença exprime, além do pensamento de que Colombo acreditava ter alcançado o Extremo Oriente, o pensamento de que Colombo não alcançara o Extremo Oriente. Portanto, a sentença subordinada refere-se, além de sua referência indireta, a um valor de verdade, o falso. A segunda possibilidade abrange o caso em que, aos pensamentos principais explicitamente expressos, associamos de acordo com leis psicológicas pensamentos secundários implícitos (N. do T.).

71. O termo *Nebengedanken* Frege tomou provavelmente de H. Lotze, *Logik* (1843), 2ª ed., Leipzig, 1980, § 57. Cumpre notar que nem em português e nem em outras línguas européias, ao que parece, existe uma tradução padronizada para essa palavra. Assim, a encontramos traduzida por 'pensamento subsidiário' (Black), 'p. anexo' (Imbert), 'p. implícito' (*idem*), 'p. associado' (Feigl), 'p. auxiliar' (Dummett), 'p. adjacente' (Granel) 'p. acessório' (Picardi), 'p. subordinado (Luis & Pareda) e, por fim, 'pensamento secundário' de que aqui nos utilizamos. Esta é a passagem em que Frege descreve, da maneira a mais minuciosa, a noção de *Nebengedanke*, que aparece em alguns de seus trabalhos. 'Quase sempre, ao que parece, aos pensamentos principais que expressamos associamos pensamentos secundários que, embora não expressos, são vinculados às nossas palavras, inclusive pelo ouvinte, consoante leis psicológicas. E dado que esses pensamentos secundários parecem espontaneamente associados às nossas palavras, quase tão espontaneamente quanto o próprio pensamento principal, parece então que queremos expressar esses pensamentos secundários tanto quanto queremos expressar o pensamento principal'. Aqui, nos é dito que cumpre não confundir o pensamento propriamente dito com os pensamentos secundários a ele associados, que englobam matizes psicológicos, nuances e colorações afetivas ou sociais que não lhe pertencem. 'O que em um poema pode ser chamado de atmosfera, fragrância, iluminação e que é descrito pela cadência e pelo ritmo, nada disso pertence ao pensamento'. E um pouco acima ele nos diz que 'não faz nenhuma diferença para o pensamento se uso a palavra "cavalo", "corcel", "ginete" ou "rocim"'. G. Frege, *Investigações Lógicas*, EDIPUCRS, p. 19. Tais pensamentos secundários não são porém subjetivos, como o são as idéias que associamos aos

vinculados às nossas palavras, inclusive pelo ouvinte, consoante leis psicológicas. E dado que esses pensamentos secundários parecem espontaneamente associados às nossas palavras, quase tão espontaneamente quanto o próprio pensamento principal, parece então que queremos expressar esses pensamentos secundários tanto quanto queremos expressar o pensamento principal. O sentido da sentença é, por isso mesmo, enriquecido, e bem pode acontecer que tenhamos mais pensamentos simples do que sentenças. Em muitos casos, a sentença deve ser entendida da maneira que acabamos de dizer. Em outros casos, porém, pode ser duvidoso se o pensamento secundário pertence de fato ao sentido da sentença ou se apenas o acompanha[72]. Poder-se-ia, talvez, achar que a sentença

"Napoleão, que reconheceu o perigo para seu flanco direito, comandou pessoalmente sua guarda contra a posição inimiga"

expressa não apenas os dois pensamentos acima indicados, mas também o pensamento de que o conhecimento do perigo foi a razão pela qual Napoleão comandou sua guarda contra a posição inimiga. Pode-se, de fato, estar indeciso quanto a se este pensamento é apenas ligeiramente sugerido ou se é realmente expresso. Pode-se perguntar se nossa sentença seria falsa se a decisão de Napoleão já tivesse sido tomada antes de ter reconhecido o perigo. Se admitimos que a sentença fosse verdadeira mesmo neste caso, o pensamento secundário não deveria ser tomado como parte do sentido dessa sentença. Provavelmente, caberia decidir-se em favor desta última alternativa. No caso contrário, porém, dar-se-ia uma situação bastante complicada: teríamos mais pensamentos simples do que sentenças. Se a sentença

"Napoleão reconheceu o perigo para seu flanco direito"

fosse agora substituída por outra de mesmo valor de verdade, por exemplo,

"Napoleão tinha mais de 45 anos",

sinais. Vimos já que a idéia é subjetiva, o referente é objetivo e o sentido, que pode ser encarado como espécie de mediador entre ambos, intersubjetivo. Portanto, os pensamentos secundários são também objetivos – ou, caso se queira, intersubjetivos – como o são os pensamentos principais. Contudo, podem ser totalmente descartados pelo lógico ao proceder suas inferências (N. do T.).

72. Isso pode ser importante para a questão de saber quando uma asserção é uma mentira ou um juramento é um perjúrio.

não somente nosso primeiro pensamento se alteraria, como também o terceiro; e com iso poderia também alterar o valor de verdade deste último pensamento, isto é, se sua idade não tivesse sido a razão da decisão de comandar a guarda contra o inimigo. Isso mostra por que, em tais casos, uma sentença nem sempre pode ser substituída por outra de igual valor de verdade. Pois, por estar associada a uma outra, a sentença expressa mais do que o faria isoladamente.

Consideremos agora casos onde associações desse gênero [de um pensamento secundário] acontecem regularmente. Na sentença

"Bebel supunha que a devolução da Alsácia-Lorena aplacaria
o desejo de desforra da França",

dois são os pensamentos expressos, que no entanto não pertencem nem à sentença principal nem à sentença subordinada – ei-los:

1. Bebel acreditava que a devolução da Alsácia-Lorena aplacaria o desejo de desforra da França.
2. A devolução da Alsácia-Lorena não aplacaria o desejo de desforra da França.

Na expressão do primeiro pensamento, as palavras da sentença subordinada têm referência indireta, enquanto que na expressão do segundo pensamento essas mesmas palavras têm referência costumeira. Isso mostra que, na sentença composta original, a sentença subordinada deve ser interpretada de duas maneiras: de um lado a referência é um pensamento, e de outro a referência é um valor de verdade. Uma vez que o valor de verdade não é a única referência da sentença subordinada, não podemos simplesmente substituí-la por outra de igual valor de verdade. Considerações semelhantes aplicam-se a expressões como "saber", "reconhecer", "é sabido que".

Por meio de uma sentença subordinada causal e de sua sentença principal, expressamos vários pensamentos que no entanto não correspondem a cada uma das sentenças tomadas isoladamente. Na sentença

"Porque o gelo é menos denso do que a água, flutua na água"

temos as seguintes asserções:

1. O gelo é menos denso do que a água.
2. Se algo é menos denso do que a água, então flutua na água.
3. O gelo flutua na água.

O terceiro pensamento não precisa, em certo sentido, ser explicitamente mencionado, uma vez que está contido nos dois primeiros. Por outro lado, nem associando-se o primeiro pensamento com o terceiro, nem o segundo com o terceiro ter-se-ia o sentido completo de nossa sentença. Pode-se ver, agora, que a sentença subordinada

"porque o gelo é menos denso do que a água"

expressa tanto o primeiro pensamento como também uma parte do segundo. Donde nossa sentença subordinada não poder simplesmente ser substituída por outra de igual valor de verdade; pois isso alteraria nosso segundo pensamento e, em conseqüência, bem poderia alterar seu valor de verdade.

A situação é semelhante para a sentença

"Se o ferro fosse menos denso do que a água, flutuaria na água".

Aqui temos dois pensamentos: de que o ferro não é menos denso do que a água, e de que algo flutua na água se for menos denso do que a água. Novamente, a sentença subordinada expressa um pensamento e parte de outro pensamento. Se interpretamos a sentença acima considerada

"Depois que o Schleswig-Holstein se separou da Dinamarca, Prússia e Áustria se desentenderam"

como expressando o pensamento de que o Schleswig-Holstein um dia se separou da Dinamarca, então temos: primeiramente esse pensamento, e em segundo lugar o pensamento de que, numa época, determinada pela sentença subordinada, Prússia e Áustria se desentenderam. Aqui, também, a sentença subordinada expressa um pensamento e ainda parte de um outro pensamento. Por essa razão ela não pode, em geral, ser substituída por outra do mesmo valor de verdade.

É difícil exaurir todas as possibilidades que a linguagem pode apresentar; mas espero ter esclarecido pelo menos as razões essenciais por que uma sentença subordinada nem sempre pode ser substituída por outra de igual valor de verdade, sem afetar a verdade da sentença total. Essas razões são:

1. A sentença subordinada não se refere a nenhum valor de verdade, na medida em que ela expressa apenas uma parte de um pensamento.

2. A sentença subordinada refere-se a um valor de verdade, mas não se restringe apenas a isso, na medida em que seu sentido inclui, além de um pensamento, também uma parte de outro.

O primeiro caso ocorre:

a. quando as palavras tiverem referência indireta;
b. se uma parte da sentença indicar indefinidamente, em vez de ser um nome próprio.

No segundo caso, a sentença subordinada tem que ser interpretada de duas maneiras: ora em sua referência costumeira e ora em sua referência indireta. Ou então, pode ocorrer que o sentido de uma parte da sentença subordinada seja, simultaneamente, um componente de um outro pensamento que, associado ao sentido diretamente expresso pela sentença subordinada, forme o sentido total da sentença principal mais a subordinada.

Disto se segue, com suficiente probabilidade, que os casos em que uma sentença subordinada não é substituível por outra de mesmo valor de verdade não refutam nosso ponto de vista de que o valor de verdade é a referência da sentença e seu sentido é um pensamento[73].

Voltemos agora ao ponto de partida[74].

Se, em geral, percebemos uma diferença no valor cognitivo de "$a = a$" e "$a = b$", isto se explica pelo fato de que, para determinar o valor cognitivo de uma sentença, é tão relevante o sentido da sentença, isto é, o pensamento por ela expresso, quanto sua referência, a saber, seu valor de verdade. Se $a = b$, então a referência de "b" é a mesma que a de "a", e portanto também o valor de verdade de "$a = b$" é o mesmo que o de "$a = a$". Apesar disso, o sentido de "b" pode diferir do sentido de "a" e, portanto, o pensamento expresso por "$a = b$" pode diferir do pensamento expresso por "$a = a$". Nesse caso, as duas

73. Aqui, Frege reitera o que dissera acima: em princípio, a referência de toda sentença é um valor de verdade. Ocorre porém que existem situações em que esse princípio fica, por assim dizer, em suspenso (N. do T.).

74. Este artigo conclui afirmando que se 'a' e 'b' tiverem o mesmo referente, ainda assim seus sentidos poderão diferir. Aliás, o que dá a um juízo de igualdade – como '$a = b$' – um valor cognitivo relevante é reconhecer um mesmo referente sob dois sentidos distintos. Tal é o caso dos sinais (complexos) 'o autor do *Teeteto*' e 'o mestre de Aristóteles', que diferem quanto ao sentido, mas não quanto ao referente. Dizer que 'o autor do *Teeteto* é o mestre de Aristóteles' é enunciar uma sentença sintética de igualdade, pois encerra algo de original e informativo, já que iguala dois sinais distintos, de sentidos distintos, mas de mesma referência (N. do T.).

sentenças não têm o mesmo valor cognitivo. Se, como anteriormente, entendemos por "juízo" o movimento de um pensamento para seu valor de verdade, então podemos dizer também que os juízos são distintos.

8

DIGRESSÕES SOBRE O SENTIDO E A REFERÊNCIA (1882-1895)

Em um artigo ("Sobre o Sentido e a Referência") distingui sentido (*Sinn*) de referência (*Bedeutung*) apenas para os nomes próprios (ou, caso se queira, nomes de indivíduos)[1]. Essa mesma distinção pode ser feita também para os termos conceituais. Mas é fácil originar-se um mal-entendido, caso se confunda a classificação em conceitos e objetos com a distinção entre sentido e referência, sempre que se associe, de um lado, sentido com conceito, e, de outro, referência com objeto. A cada termo conceitual e a cada nome próprio corresponde, em regra, um sentido e uma referência, na acepção em que emprego esses termos[2]. Na poesia, naturalmente, as palavras têm apenas sentido; na ciência, porém, e onde quer que nos preocupe investigar a verdade, não nos contentaremos apenas com o sentido, e assim cumpre associar aos nomes pró-

Este artigo foi publicado postumamente sob o título – dado pelos organizadores da edição alemã de sua obra – de 'Ausführungen über Sinn und Bedeutung', G. Frege, *Nachgelassene Schrift*, ed. H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach, Hamburg, F. Meiner Verlag, 1969. Ele deve ter sido escrito entre 1892 e 1895, constituindo um dos escritos de um conjunto de trabalhos intitulado genericamente de 'Schrödersche Logik', que aparentemente existia de forma completa antes da destruição parcial do arquivo de Frege na Segunda Guerra Mundial. Empregamos aqui o sinal de asterisco para caracterizar as notas de Frege e numerais arábicos para designar as notas apensadas tanto pelos editores alemães como pelo tradutor.

1. Neste artigo, é estabelecida essa distinção para nomes de indivíduos, sentenças simples e sentenças complexas que são, no entender de Frege, nomes próprios, já que todos têm como referentes objetos (N. do T.).
2. No que se segue, Frege irá explicar que um termo conceitual tem como referência um conceito e como sentido o modo de apresentação desse conceito (N. do T.).

prios e aos termos conceituais uma referência. E se eventualmente, por engano, não o fizermos, cometemos um erro que pode facilmente fazer malograr nossa reflexão.

Um nome próprio tem como referência o objeto que ele designa ou nomeia. Um termo conceitual refere-se a um conceito, se o termo for usado como é apropriado em lógica. Para explicar isto, lembro-me de uma circunstância que parece falar a favor dos lógicos extensionalistas (*Logiker des Umfans*) em oposição aos lógicos intensionalistas ([*L.*] *des Inhalts*)[3], a saber, que em toda sentença, sem prejuízo da verdade, um termo conceitual pode substituir um outro termo conceitual, caso eles tenham a mesma extensão conceitual[4]; e também em relação à inferência e às leis lógicas, os conceitos só procedem de maneira diferente na medida em que forem distintas suas extensões[5]. A relação lógica fundamental é a de um objeto cair sob um conceito: a ela podem-se reduzir todas as relações entre conceitos. Ao cair um objeto sob um conceito, ele cai sob todos os conceitos de mesma extensão, e isto acarreta o que acima se disse. E assim como nomes próprios do mesmo objeto podem substituir uns aos outros, sem prejuízo da verdade, o mesmo também é válido para os termos conceituais, se suas extensões forem as mesmas. Naturalmente que com tais substituições alterar-se-á o pensamento; mas este é o sentido da sentença, não sua referência[*]. A referência, que é o valor de verdade, permanece inalterada. Poder-se-ia, facilmente, chegar à conclusão de que a extensão do conceito seja a referência do termo conceitual; fazer isso, porém, seria não levar em conta que extensões de conceitos são objetos, e não conceitos (cf. minha conferência "Função e Conceito"). Contudo, há nisto um núcleo de verdade. Para torná-lo mais claro, devo reportar-me ao que disse em meu opúsculo *Função e Conceito*. [Aí dissemos que] o conceito é uma função de um argumento, cujo valor é sempre um valor de verdade. Tomo da Análise a palavra "função" e a emprego numa acepção mais ampla, preservando seu sentido essencial, um procedimento aliás cuja direção é apontada pela própria história da Análise. O

3. Essa é uma questão em aberto: a de se cabe dar ênfase – como o fazem os assim chamados 'lógicos extensionalistas' – à extensão (ou referência), ou então – como o fazem os lógicos intensionalistas – à intensão (ou sentido), seja do termo (ou conceito), seja da sentença (ou juízo ou pensamento), seja da inferência (ou raciocínio). No que se segue, Frege discute alguns tópicos lógicos sob um e outro aspecto (N. do T.).
4. Nessa passagem encontramos a condição sob a qual Frege admite que um termo conceitual possa vir a substituir um outro termo conceitual: basta que tenham a mesma extensão (N. do T.).
5. Frege aqui se manifesta pela concepção extensional de lógica (Ed. al.).
* Ver meu artigo "Sobre o Sentido e a Referência".

nome de uma função sempre encerra lugares vazios (pelo menos um) para o argumento, que na Análise são indicados, na maioria das vezes, pela letra "*x*", que preenche esses lugares vazios. Mas o argumento não deve ser tido como parte da função e, conseqüentemente, a letra "*x*" tampouco deve ser considerada como parte do nome da função. De modo que se pode falar de lugares vazios no nome, já que o que os preenche não pertence propriamente a esse nome. Em conseqüência, chamo a função de insaturada ou necessitada de complementação, porque seu nome tem de ser complementado por um sinal de um argumento para alcançar uma referência completa. Uma tal referência completa chamo de objeto e, no presente caso, é o valor da função para o argumento que realiza a complementação ou saturação. Nos casos mais simples que se apresentam, o argumento é ele próprio um objeto, e a esses casos nos limitaremos aqui. No que tange ao conceito, temos o caso especial em que o valor é sempre um valor de verdade. Se um nome conceitual complementarmos com um nome próprio, obtemos uma sentença cujo sentido é um pensamento, ao qual corresponde como referência um valor de verdade. Ao reconhecer este valor de verdade como verdadeiro (aliás, como o verdadeiro), julgamos que o objeto tomado como argumento cai sob o conceito. O que chamamos, no que tange à função, de insaturação, podemos, no que tange ao conceito, chamar de sua natureza predicativa*. Esta também se observa mesmo nos casos em que se fala de conceito sujeito – como "Todos os triângulos eqüiláteros são eqüiângulos", que significa "Se algo é um triângulo eqüilátero, então ele é um triângulo eqüiângulo"[6].

Ora, essa natureza do conceito constitui o grande obstáculo para a expressão adequada e para a compreensão [dessa noção]. Com efeito, para falar de um conceito a linguagem me impõe, com força quase invencível, a utilização de expressões inadequadas, que obscurecem – quase ousaria dizer falsificam – o pensamento. Quando digo "o conceito *triângulo eqüilátero*" dever-se-ia supor,

* As palavras "insaturado" e "predicativo" parecem adaptar-se melhor ao sentido do que à referência; mas mesmo assim também a elas deve corresponder algo na referência, e não conheço palavras mais adequadas. Cf. Wundt, *Logik*. [Frege poderia aqui ter previsto uma indicação do fato de que Wundt considera a parte predicativa do juízo singular face a seu sujeito – como consta na *Logik*, vol. 1 (na primeira edição de 1880, de que Frege dispunha, p. 141) –, como uma "componente mais variável do pensamento" com isto visando essencialmente a mesma coisa que Frege com o termo "insaturado" aplicado a conceitos. Também é pensável que Frege queria discutir o uso de Wundt da palavra "predicativo". Ed. al.].

6. A análise dada por Frege da sentença "Todos os triângulos eqüiláteros são eqüiângulos" deve mostrar também que o ilusório conceito de sujeito "triângulo eqüilátero" seja de natureza predicativa, a saber, pertencendo ao predicado da antecedente da sentença condicional (Ed. al.).

por analogia lingüística, que se está designando um conceito, do mesmo modo que quando digo "o planeta Netuno" se está nomeando um planeta. Mas isso não é assim, pois falta a natureza predicativa. Também a referência da expressão "o conceito *triângulo eqüilátero*", contanto que exista uma, é um objeto. Não podemos prescindir de palavras como "o conceito", mas devemos sempre nos lembrar de sua inadequação*. Do que ficou dito, depreende-se que objetos e conceitos são radicalmente distintos e não podem substituir uns aos outros. Isto também vale para as correspondentes palavras ou sinais. Nomes próprios nunca podem ser propriamente empregados como predicados. Mesmo nos casos em que à primeira vista assim pareça ser, um exame atento mostrará que, do ponto de vista do sentido, eles são apenas uma parte do predicado: os conceitos não podem ter entre si as mesmas relações que os objetos. Imaginá-los como tendo essas relações não seria falso, mas impossível. Por isso, as palavras "relação do sujeito para com o predicado"[7] designam duas relações totalmente diversas, conforme o sujeito seja um objeto ou um conceito. Assim sendo, o melhor seria eliminar totalmente da lógica as palavras "sujeito" e "predicado", posto que elas nos levam continuamente a confundir duas relações radicalmente diferentes: a de cair um objeto sob um conceito e a de subordinar um conceito a outro conceito. As palavras "todos" e "alguns", que ficam junto ao sujeito gramatical, fazem parte, no que concerne ao sentido, ao predicado gramatical, como se vê ao passar para a negação (nem todos, *nonnulli*)[8]. Isto por si só basta para mostrar que nesses casos o predicado é diferente daquilo que enunciamos de um objeto. Assim também a relação de igualdade, que compreendo como total coincidência, identidade, só é imaginável entre objetos, e

* Tratarei adiante desta dificuldade.

7. A expressão 'relação do sujeito para com o predicado' expressa, na verdade, não uma mas duas relações, consoante a natureza do sujeito: i) se o sujeito for um objeto (*v. g.*, 'Sócrates é homem'), diz-se que este *cai sob* o (ou *está subsumido* ao) predicado; ii) se o sujeito for um conceito (*v. g.*, 'Todo homem é animal'), diz-se que este *cai em* (ou *está subordinado* ao) predicado. Isto se deve ao fato de termos, no primeiro caso, como sujeito um objeto designado por uma expressão saturada, e, no segundo caso, um conceito designado por uma expressão insaturada. (Neste segundo caso, embora o quantificador afete exteriormente o sujeito da sentença, na verdade ele está antes vinculado ao predicado gramatical do que ao sujeito). N. do T.

8. Frege pensa no seguinte estado de coisas: A negação de "Aristóteles é filósofo" é "Aristóteles não é filósofo". Contudo, a negação de "Todos os triângulos eqüiláteros são eqüiângulos" não é, em absoluto, "Todos os triângulos eqüiláteros não são eqüiângulos". Neste segundo exemplo, a negação só se daria como no primeiro exemplo [*i. e.*, pela negação da cópula], caso se analise essa sentença como a afirmação da *subordinação* de um conceito sob outro conceito: "O conceito 'triângulo eqüilátero' está subordinado ao conceito 'triângulo eqüiângulo'" [cuja negação seria, neste caso, "O conceito 'triângulo eqüilátero' *não* está subordinado ao conceito 'triângulo eqüiângulo'"] (Ed. al.).

nunca entre conceitos. Se dizemos "A referência do termo conceitual 'secção cônica' é a mesma que a do termo conceitual 'curva de segunda ordem'", ou ainda "O conceito *secção cônica* coincide com o conceito *curva de segunda ordem*", então as palavras "referência do termo conceitual 'secção cônica'" são o nome de um objeto e não de um conceito. Pois falta-lhes a natureza predicativa, a insaturação, a possibilidade de serem usadas com o artigo indefinido. O mesmo vale para as palavras "o conceito *secção cônica*"[9]. Mas, ainda que a relação de igualdade só seja concebível entre objetos, entre os conceitos também ocorre uma relação análoga que, enquanto se dá entre conceitos, denomino de relação de segundo nível, ao passo que a igualdade chamo de relação de primeiro nível. Dizemos que um objeto a é igual a um objeto b (no sentido de coincidência total) se a cai sob todos os conceitos sob os quais cai b, e vice-versa[10]. Obtemos algo de similar para os conceitos se fizermos com que conceito e objeto troquem os seus papéis. Poderíamos então dizer que a relação acima imaginada tem lugar entre o conceito Φ e o conceito X, se cada objeto que cai sob Φ também cai sob X e vice-versa. Ao assim nos expressar, é verdade, não pudemos evitar as expressões "o conceito Φ", "o conceito X", o que novamente obscurece o sentido exato. Por isso, para o leitor que não se atemoriza ante a conceitografia, quero acrescentar ainda o seguinte: a insaturação do conceito (de primeiro nível) é representada na conceitografia deixando-se pelo menos um lugar vazio em sua designação para receber o nome do objeto que há de cair sob o conceito em questão. Esse lugar, ou esses lugares, sempre deve ser preenchido de uma maneira ou de outra. Isto pode ser feito tanto por um nome próprio como por um sinal que só indique, mas não se refira, a um objeto. Com isso se verifica que, ao lado do sinal de igualdade, ou de um sinal similar, nunca pode ocorrer a mera designação de um conceito; pelo contrário, além do conceito, também um objeto deve sempre ser designado ou indicado. Mesmo quando indicamos os conceitos esquematicamente por meio de uma

9. Secção cônica é uma curva que resulta da interseção entre um plano e uma superfície cônica assente numa base circular, que se estende indefinidamente através do seu vértice em ambas as direções, gerando dessa forma a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole. Essas quatro curvas são denominadas 'curvas de segunda ordem' por serem expressas por equações que contêm dois argumentos (por exemplo, a circunferência é expressa pela seguinte equação: $x^2 + y^2 = r^2$, onde r é o raio da circunferência). N. do T.

10. Frege obtém sua definição de identidade entre objetos do *principium identitatis indiscernibilium* de Leibniz. Ele se refere com isso (cf. *inter alia*, *Fundamentos da Aritmética*, § 65) à expressão de Leibniz: "*Eadem sunt, quorum unum postest substitui alteri salva veritate*" ('Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis', *Oper. Philos.*, I, p. 94, ed. J. E. Erdmann; *Philos. Schr.*, VII, p. 288, ed. Gerhardt) (Ed. al.).

letra funcional, isto sempre deve ser feito evidenciando a insaturação mediante um lugar vazio que a acompanha, como em $\Phi()$ e $X()$. Em outros termos, as letras (Φ, X), destinadas a indicar ou designar conceitos, só devem ser utilizadas como letras funcionais, a saber, de modo que tragam consigo um lugar para o argumento (o espaço interno entre os parênteses que sucedem a letra). Não se deveria pois escrever $\Phi = X$, posto que as letras Φ e X não se apresentam como letras funcionais. E tampouco se deve escrever $\Phi() = X()$, pois os lugares de argumento não foram preenchidos. Mas, se estes forem preenchidos, não são somente as funções (conceitos) que são entre si igualadas, senão que a cada lado do sinal de igualdade, além das letras funcionais, existe algo mais que não faz parte da função[11].

Essas letras[12] não podem ser substituídas por outras que não sejam utilizadas como letras funcionais: sempre deve existir um lugar de argumento para receber o "α". Poder-se-ia pensar em simplesmente escrever $\Phi = X$. Isto pode parecer viável, conquanto os conceitos sejam indicados esquematicamente; mas uma maneira verdadeiramente adequada de designar deve adaptar-se a todos os casos. Tomemos um exemplo que já usei em meu escrito sobre *Função e Conceito.*

A função $x^2 = 1$ tem, para todo argumento, o mesmo valor (de verdade) que a função $(x + 1)^2 = 2\ (x + 1)$, isto é, todo objeto que cai sob o conceito *o que é uma unidade menor que um número cujo quadrado é igual a seu dobro* cai sob o conceito *raiz quadrado de 1*, e vice-versa. Expressaríamos este pensamento, conforme[13] acima mencionado, do seguinte modo:

$$(\alpha^2 = 1) \overset{\alpha}{\asymp} ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)).$$

Aqui, temos, na verdade, uma relação de segundo nível (*Stufe*) que corresponde à igualdade (à total coincidência) quando se trata de objetos, mas que com ela não deve ser confundida. Se a escrevemos $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-(\mathfrak{a}^2 = 1) = ((\mathfrak{a} + 1)^2 = 2(\mathfrak{a} + 1))$, expressamos essencialmente o mesmo pensamento, concebido

11. Observamos que para Frege a igualdade só se dá entre objetos (referentes de nomes próprios), entre extensões de conceitos ou ainda entre percursos de valores de funções, mas não propriamente entre os conceitos (N. do T.).

12. Apontamentos de antigos colaboradores, nas cópias em que se baseia esta edição, fazem parecer possível que Frege tenha riscado ou colocado entre parênteses este parágrafo (até "... sobre *Função e Conceito*"), que em parte repete coisas já ditas. (Ed. al.)

13. Pode ser que a notação empregada na fórmula que se segue, que Frege *não* explicou acima, tenha sido introduzida na primeira parte extraviada de seu manuscrito. (Ed. al.)

como uma igualdade[14] entre valores de funções de validade geral. Temos aqui a mesma relação de segundo nível, e temos também o sinal de igualdade mas este [sinal] não basta por si só para designar essa relação: ele só o faz em combinação com o sinal de generalidade, vale dizer, o que temos de início é um enunciado geral, e não uma igualdade. Em

$$'\varepsilon\left(\varepsilon^2 = 1\right) = '\alpha\left(\left(\alpha+1\right)^2 = 2\left(\alpha+1\right)\right)$$

temos por certo uma igualdade, mas não entre conceitos (o que é impossível), mas entre objetos, isto é, entre extensões de conceitos.

Vimos, pois, que a relação de igualdade entre objetos não pode ser concebida também entre conceitos, embora entre conceitos também exista uma relação correspondente. A expressão "o mesmo", usada para designar a relação entre objetos, não pode propriamente servir para designar a relação entre conceitos. Se insistíssemos em usá-la para este fim, praticamente não nos restaria outra coisa senão dizer "o conceito Φ é o mesmo que o conceito X", mas ao assim fazer nomeamos uma relação entre objetos*, quando visávamos a nomear, em realidade, uma relação entre conceitos. Temos o mesmo caso quando dizemos "a referência do termo conceitual *A* é a mesma que a do termo conceitual *B*". A rigor, a expressão "a referência do termo conceitual *A*" deveria ser banida, pois o artigo definido anteposto à "referência" indica um objeto, contradizendo assim a natureza predicativa do conceito. Melhor seria dizer "aquilo a que o termo conceitual *A* se refere", uma vez que essa expressão sempre haverá de ser usada predicativamente: "Jesus é aquilo a que o termo conceitual 'homem' se refere", no sentido de "Jesus é um homem".

Tendo presente tudo o que se disse, estamos em condição de asserir "Aquilo a que dois termos conceituais se referem é o mesmo se, e somente se, as extensões dos conceitos correspondentes coincidirem", sem incorrer em erro por uso inadequado da expressão "o mesmo". E com este enunciado, creio, é feita uma concessão considerável aos lógicos extensionalistas. Eles têm razão quando, mostrando sua predileção pela extensão em detrimento do conteúdo conceitual, consideram a referência, e não o sentido das palavras,

14. Dado o sentido amplo que tem a palavra *Gleichung* nos escritos de Frege, preferimos aqui traduzi-la por 'igualdade' e não por 'equação'. Cf. cap. 5, n. 6, p. 83 (N. do T.).

* Esses objetos têm por nome "o conceito Φ" e "o conceito X".

como a coisa essencial para a lógica. Os lógicos intensionalistas gostam de se ater ao sentido, pois o que eles chamam de conteúdo, caso não seja apenas a idéia (*Vorstellung*)[15], outra coisa não é senão o sentido. Não percebem que a lógica não se interessa como uns pensamentos se seguem de outros sem levar em conta o valor de verdade; que cumpre passar do pensamento para o valor de verdade, mais genericamente, que cumpre ir do sentido para a referência; que as leis lógicas são, primordialmente, leis do domínio das referências e só mediatamente (*mittelbar*) se relacionam com o sentido. Se estamos interessados na verdade – e a lógica visa à verdade – também devemos indagar pelas referências, devemos rejeitar os nomes próprios que, embora tenham um sentido, não designam ou nomeiam nenhum objeto; devemos rejeitar os termos conceituais que não tenham nenhuma referência. Estes [conceitos], porém, não são os que encerram uma contradição – pois um conceito pode muito bem ser vazio –, mas os conceitos cuja delimitação é imprecisa. Para cada objeto, deve-se poder determinar se este cai ou não sob o conceito; um termo conceitual que não satisfaça tal exigência quanto à sua referência, carece de referência (*bedeutungslos*). A esta espécie de termos pertence, por exemplo, a palavra "μῶλυ"[16] (Homero, *Odisséia*, X, 305), ainda que algumas de suas notas (*Merkmale*) sejam enumeradas. Isto não quer dizer que essa passagem careça de sentido, como tampouco são carentes de sentido as passagens em que figura o nome "Nausicaa"[17] que, presumidamente, nada nomeia, nem se refere a coisa alguma. Mas [esta palavra] age como se denominasse uma donzela, e com isto assegura um sentido. De fato, para a poesia basta o sentido, basta o pensamento sem referência, sem valor de verdade; mas tal não basta para a ciência.

Em meus *Fundamentos* e na conferência 'Sobre as Teorias Formais da Aritmética'[18] mostrei que, para certas provas, de maneira alguma é indiferente se uma certa combinação de sinais – por exemplo, $\sqrt{-1}$ – tem ou não uma referência*, e que, pelo contrário, nisto se sustenta toda a força probatória.

15. Cf. cap. 3, n. 63 (N. do T.)
16. A palavra μῶλυ designa, em Homero, uma planta mágica de folhas brancas e raízes negras, que Ulisses recebe de Hermes, para proteger-se de Circe (Ed. al.).
17. Figura fabulosa, filha de Alcinoos, rei dos feácios. Talvez seja a personagem mais encantadora de Homero (N. do T.).
18. Na conferência citada, proferida por Frege em 17 de julho de 1885, diante da Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft (Ed. al.).

* De fato, eu ainda não tinha fixado o uso agora adotado das palavras *Sinn* [sentido] e *Bedeutung* [referência], de maneira que, às vezes, dizia *Sinn* [sentido] onde agora digo *Bedeutung* [significado]. [A palavra *Bedeutung*, em alemão corrente, quer dizer "significado" ou "sentido". A partir de 'Sobre o Sentido e a Referência' (1892), Frege toma *Bedeutung* na acepção de "referência". Daí esta observação (N. do T.)].

Assim, a referência se manifesta em toda parte como o essencial para a ciência. Ainda que se conceda aos lógicos intensionalistas que o conceito, em oposição à extensão, é prioritário, isso não significa que ele deva ser tomado como o sentido do termo conceitual, mas como sua referência. E os lógicos extensionalistas se aproximam mais da verdade ao apresentar, na extensão, como o essencial uma referência, referência que, na verdade, não é o conceito mesmo, mas a ele está estreitamente ligada.

O Sr. Husserl critica a falta de clareza de Schröder[19] nas passagens onde ele explica[20] as palavras "*unsinnig*" ['sem-sentido'], "*einsinnig*" ['de-um-sentido'], "*mehrsinnig*" ['de-vários-sentidos'], e "*undeutig*" ['sem-referência'], "*eindeutig*" ['de-uma-referência'] "*mehrdeutig*" ['de-várias-referências'] (pp. 48ss e 69), e de fato a falta de clareza existe, mas tampouco Husserl as distingue adequadamente. Como era de se esperar, Schröder emprega as palavras "*sinnig*" e "*deutig*" de modo diverso do meu; e não me cabe censurá-lo por isso, especialmente se se considera que, ao aparecer sua obra, nada havia eu ainda publicado sobre essa questão. Em Schröder, essa distinção se relaciona com a diferença que existe entre nomes comuns e nomes próprios, e a obscuridade provém da compreensão imperfeita da diferença entre conceito e objeto. Os nomes comuns podem ser, segundo ele, *mehrdeutig* [de-várias-referências] sem que isto tenha algo de errado, e eles assim o são quando, sob o conceito correspondente, caem diversos objetos*. Segundo essa maneira de ver, um

19. Frege reporta-se, no que se segue, à resenha feita por Husserl a Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exakte Logik*) I (Leipzig, 1890), publicada nos *Göttingischen Gelehrten Anzeigen* (ano 1891, caderno de 10 de abril, pp. 243-278) (Ed. al.).

20. Schröder fixa, nos trechos indicados por Frege, os adjetivos terminados em "deutig" para dar indicações quantitativas de extensões conceituais. Schröder fala, de um modo geral, de nomes (*Namen*) e chama os nomes próprios de "*eindeutig*" [de-uma-referência], os nomes genéricos, como 'minha mão', de "*zweideutig*" [de-duas-referências], os nomes genéricos gerais de "*mehrdeutig*" ou "*vieldeutig*" [de-várias-referências] e os nomes como 'nada' ou 'quadrado redondo' de "*undeutig*" [sem-referência]. As formações correspondentes com "*sinnig*" servem, em Schröder, para diferenciar os termos que têm uso lingüístico rigorosamente fixado ("*einsinnig*" ou "*univok*"), dos termos de múltiplas referências ("*doppelsinnig*", "*mehrsinnig*" ou "*äquivok*") e de construções lingüísticas carentes de sentido ("*unsinning*"; no exemplo de Schröder: 'quadrado redondo'). Mais adiante, Frege, conjuntamente com Husserl, critica sobretudo que um nome como 'quadrado redondo' seja chamado por Schröder de "*undeutig*", pois para essa caracterização ser aplicada a um termo é pressuposto, sem dúvida, que ele seja dotado de sentido, e, assim sendo, ele não pode ser, simultaneamente, designado como "*unsinning*" (Ed. al.).

* Se, como Husserl diz na nota da p. 252, um nome distributivo (*distributiver Name*) é aquele "cuja *Bedeutung* consiste em designar isto ou aquilo de uma pluralidade de coisas", então um termo conceitual (nome comum) não é, desse modo, um nome distributivo. [De uma observação de antigos colaboradores conforme as cópias da edição, aparentemente não ficou bem claro, no manuscrito original, em que lugar de seu texto Frege quis associar esta nota. Os editores seguiram assim a sugestão dos antigos colaboradores (Ed. al.)].

nome comum também poderia ser *undeutig* [sem-referência], como "quadrado redondo", sem que isto constitua uma falha. Mas Schröder o chama também de *unsinnig* [sem-sentido], sendo assim incoerente com sua própria maneira de se expressar; pois, segundo esta, "quadrado redondo" deveria ser chamado *einsinnig* [de-um-sentido], e Husserl tem razão ao chamá-lo de nome comum unívoco; pois "unívoco" (*univok*) e "equívoco" (*äquivok*) correspondem ao que Schröder chama de *einsinnig* [de-um-sentido] e *mehrsinnig* [de-vários-sentidos]. Husserl diz (p. 250): "Evidentemente ele [Schröder] confunde aqui duas questões muito diferentes, a saber, 1) a de se um nome tem um significado (um "sentido"); e 2) a de se existe ou não um objeto correspondente ao nome". Mas essa distinção não é adequada. A palavra "nome comum" leva erroneamente a supor que o nome comum se relaciona com os objetos, no essencial, do mesmo modo que o faz o nome próprio, apenas com a diferença de que este só nomeia um único objeto enquanto que aquele se aplica em geral a diversos objetos. Isto, porém, é falso, e por essa razão prefiro dizer "termo conceitual" (*Begriffswort*) em lugar de "nome comum" (*Gemeinname*)[21]. Um nome próprio deve ter pelo menos um sentido (na acepção em que entendo essa palavra), senão ele será apenas uma mera seqüência vazia de sons, e seria ilegítimo chamá-lo de nome. Mas para que tenha um uso em ciência deve-se exigir também que ele tenha uma referência, que designe ou nomeie um objeto. Assim, o nome próprio se relaciona, mediante o sentido, e só mediante o sentido, com o objeto.

Também o termo conceitual deve ter um sentido e, para que tenha um uso científico, deve ter uma referência; esta, porém, não é nem um objeto, nem uma pluralidade de objetos, mas um conceito[22]. Pode-se, por certo, perguntar a propósito de um conceito se sob ele cai um objeto, ou se vários ou se nenhum. Mas isto só diz diretamente respeito ao conceito. Assim, um termo conceitual pode, do ponto de vista lógico, ser absolutamente impecável sem que haja um objeto com o qual ele se relacione mediante seu sentido e sua referência (o

21. O uso tradicional de 'nome comum' insinua que se está nomeando ou designando algo. Por esta razão, Frege opta por 'termo conceitual', que aparentemente não sugere esse fato. Assim sendo, não há nenhuma inconveniência em se manipular conceitos vazios (*v. g.*, quadrado circular) que são designados por termos conceituais. Frege nos diz que 'quadrado circular' não é 'um nome vazio, mas o nome de um conceito vazio e, portanto, não carece de significado (*bedeutungslos*)'. G. Frege, *Kleine Schriften*, p. 208 (N. do T.).

22. Antes de 1891, data em que Frege escreveu uma carta a E. Husserl, um conceito podia ser, segundo as circunstâncias, ora o sentido ora a referência de um termo geral. Mas a partir dessa carta, Frege estabeleceu que – em seu entender – o conceito só pode ser a referência de tais termos. G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, pp. 94-98 (N.do T.).

próprio conceito)[23]. Esta relação [do termo conceitual] com um objeto é, como se vê, uma relação mais indireta e inessencial, de modo que parece pouco conveniente classificar os termos conceituais segundo caiam sob o conceito correspondente, um, vários ou nenhum objeto. A lógica deve exigir, tanto do nome próprio como do termo conceitual, que a transição do nome para o sentido e a do sentido para a referência sejam determinadas sem deixar margem a dúvidas. Do contrário, não mais se poderia falar de uma referência. Tudo o que foi dito vale, naturalmente, para todos os sinais e combinações de sinais que tenham a mesma função que os nomes próprios e os termos conceituais.

23. A passagem acima nos diz que, de um ponto de vista lógico, não existe nenhum problema quanto ao fato de um conceito ser vazio. E o mesmo *mutatis mutandis* também se dá com os termos conceituais – *v. g.*, 'triângulo quadrilátero'. O que se impõe para a utilização lógica de um conceito é que para *todo* objeto fique inequivocamente determinado se este cai ou não sob o conceito; e para a utilização de um termo conceitual, que a transição do termo para o sentido e a do sentido para a referência fiquem totalmente determinadas (N.do T.).

9

DIÁLOGO COM PÜNJER SOBRE A EXISTÊNCIA
(< 1884)
[I. O DIÁLOGO]

01. Pünjer: [Admite o Sr. que a expressão] "Algo que não tenha a característica (*Merkmal*)[1] de voar mas que mesmo assim cai sob o conceito de 'pássaro'" tem o mesmo significado que "Entre aquilo que *é*, existe algo que não tem a característica de voar, mas que mesmo assim cai sob o conceito de 'pássaro'"?
02. Frege: O que quer dizer *é*[2]?

Devo a tradução inicial deste diálogo a meu ex-aluno A. Feurle. Esta sofreu contudo inúmeras, profundas e tão radicais modificações que ele não pode ser responsabilizado pela mesma. O presente trabalho foi postumamente publicado sob o título, dado pelos organizadores, de 'Dialog mit Pünjer über Existenz', em G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, ed. H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach, Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1969, pp. 60-75. Neste diálogo, o interlocutor de Frege é o teólogo protestante Bernhard Pünjer (1850-1885), que ocupou, a partir de 1880, uma cátedra na Universidade de Jena. Escreveu inúmeras obras, foi o editor da *Theologischer Jahresbericht* e elaborou uma edição do *Discurso sobre a Religião* de F. Schleiermacher. Segundo afirmam os editores alemães, de uma declaração do próprio Frege (cf. *infra* n. 84), do fato de ter-se utilizado do nome de Pünjer e ainda da análise estilística de suas expressões é dado concluir que se trata de um diálogo que teve de fato lugar entre Frege e o teólogo alemão. O texto que nos chegou é fragmentado e remete para expressões não registradas.

1. Em princípio, optamos por verter todas as ocorrências da palavra *Merkmal* por 'nota' (cf. cap. 6, n. 31). Contudo, em certas passagens do presente artigo preferimos o termo 'características', que também tem sido utilizado para essa finalidade. Cumpre ressaltar no entanto que isto em nada altera a noção veiculada pela palavra alemã (N. do T.).
2. Frege se propõe a discutir neste diálogo os diferentes aspectos da existência. Segundo ele,'Leo Sachse é' e 'Leo Sachse existe' são duas sentenças igualmente evidentes, que nada dizem de original e interessante. Pois, as palavras 'é' e 'existe' são, no contexto em questão, vazias e sem conteúdo. Na verdade, argumenta Frege, a existência não é uma propriedade real de objetos (indivíduos) nem uma nota (*Merkmal*) de um conceito de primeira ordem (N. do T.).

03. Pünjer: Quer dizer algo de (para nós) *experienciável* (*Erfahrbar*)[3].
04. Frege: Não seria supérfluo afirmar a experienciabilidade (*Erfahrbarkeit*) de algo?
05. Pünjer: Não, porque temos a capacidade de manipular livremente as idéias (*Vorstellungen*)[4] oriundas da experiência e, assim, formar outras idéias às quais nada de experienciável corresponde.
06. Frege: Na sentença "*A* é algo de experienciável", o sujeito real, não-lingüístico, é *A* ou a idéia de *A*?
07. Pünjer: *A*.
08. Frege: O enunciado "*A* não é algo de experienciável" é a negação do enunciado "*A* é algo de experienciável". É isto correto?
09. Pünjer: Sim, caso se entenda por "*A* não é algo de experienciável" o seguinte: a sentença "*A* é algo de experienciável" é falsa.
10. Pünjer: O enunciado "*A* não é algo de experienciável" não é possível. E sendo assim a pergunta [acima] é sem sentido. Tampouco faz sentido negar a experienciabilidade de algo.
11. Frege: Desse modo, parece-me supérfluo asserir a experienciabilidade de algo[5].
12. Pünjer: [A sentença] "Há homens" quer dizer "Ao conceito de homem corresponde algo de experienciável" ou "Algo de experienciável cai sob o conceito de homem". [A sentença] "Não há centauros" quer dizer "À idéia ou ao conceito de centauro nada corresponde de experienciável".
13. Frege: A negação, aqui, incide sobre [a palavra] "corresponde".
14. Pünjer: Sim. Ou então nada de experienciável cai sob o conceito de centauro.
15. Frege: Dizer de algo que ele é experienciável nada acrescenta a seu respeito.
16. Pünjer: Não. Esta é, aliás, a diferença entre este predicado (*Aussage*) e os demais.

3. Ao contrário de Frege, Pünjer entende que ser é um predicado real, informativo e não evidente dos objetos (indivíduos). Segundo ele, o vocábulo 'é' significa o mesmo que 'algo de experienciável', 'algo capaz de ser objeto de experiência'. Mas importa ter presente que para Pünjer os objetos experienciáveis são apenas uma parte dos objetos de idéias (N. do T.).

4. Como o contexto o manifesta, a palavra *Vorstellung* será tomada, no decorrer do presente artigo, no sentido de 'conceito' ou 'idéia geral' e não na acepção mais restrita e especializada que veio a receber de Frege em outros trabalhos, como vemos supra p. 134. (N. do T.).

5. A estratégia argumentativa de Frege ao longo do presente trabalho será mostrar que a concepção de Pünjer sobre a existência desemboca numa contradição (N. do T.).

17. Frege: Por isto, continua me parecendo supérfluo afirmar de qualquer coisa sua experienciabilidade, já que por força desta afirmação nada de novo sabemos a seu respeito. O Sr. acabou de elucidar [a expressão] "Há" e porque tais juízos não são supérfluos, mas não explicou porque não é supérfluo o juízo "Isto é algo de experienciável".
18. Pünjer: "Isto é algo de experienciável" quer dizer "A idéia de 'isto' não é uma alucinação, não é uma construção minha; pelo contrário, esta idéia foi formada por uma afecção do isto sobre o eu'.
19. Frege: O Sr. distingue, pois, dois tipos de idéias?
20. Pünjer: Sim. Há dois tipos de idéias: as que são formadas dentro do eu, e as que são formadas por uma afecção sobre o eu. Para distinguir um tipo do outro, digo: enquanto que às primeiras não corresponde nenhum objeto experienciável, no que diz respeito às últimas correspondem objetos experienciáveis.
21. Frege: Se assim é, parece-me que o sujeito real, segundo sua concepção, seja a idéia. O Sr. não concorda que, em todo enunciado material, o sujeito real deve ser inserido em uma classe para assim se distinguir de tudo que não pertença a esta classe?
22. Pünjer: Admito; mas o enunciado de existência não é material. No entanto, não admito, caso se entenda por "material" o mesmo que "não evidente" ou "não contendo uma lei puramente lógica".
23. Frege: Nas sentenças "Há homens" e "Não há centauros" também é feita uma classificação. Elas, porém, não classificam coisas, que, em um dos casos, nem sequer existem, e que, no outro, não estão inseridas em nenhuma das duas classes; aqui, o que o Sr. está classificando são os conceitos de "homem" e de "centauro", inserindo o primeiro na classe dos conceitos sob os quais algo cai, e excluindo o segundo desta classe. Eis porque sou de opinião que os conceitos são os sujeitos reais destas sentenças. Quando o Sr. diz "Isto é algo de experienciável", no sentido de "Esta minha idéia não é apenas algo criado por mim", o que o Sr. classifica é a idéia. O Sr. a está inserindo em um dos dois tipos de idéias, pelo Sr. há pouco distinguidas. Por tal razão, entendo que o sujeito real é aqui a idéia. Isto também pode ser expresso lingüisticamente assim: a idéia tem a propriedade de ter algo que lhe corresponde.
24. Pünjer: Aqui, o que está em questão é saber o que se entende por negação. A negação só é possível após um prévio posicionamento a respeito de algo. Se dizemos "Centauros não existem", isto só é possível porque antes os pensamos fora de nós. A recusa da existência [de algo] se dá por duas razões: 1)

uma contradição lógica, 2) exterior ao conceito ou à idéia na experiência[6]. Portanto, em sentido estrito, nem a idéia nem o conceito são o sujeito real.

25. Frege: Com isto o Sr. apenas oferece a razão pela qual se enuncia um juízo existencial. Um juízo como "Há raízes quadradas de 4" também pode ser derivado do conceito de raiz quadrada de 4.
26. Pünjer: [A expressão] "Há raízes quadradas de 4" não quer dizer "O que cai sob o conceito de raiz quadrada de 4 é algo de experienciável", caso entendamos por experienciável algo de auto-subsistente, algo que existe por si próprio. Os números só existem em algo. Por tal motivo, esse juízo é essencialmente diferente do juízo "Há homens". Eu nunca diria "4 existe"; tampouco diria "Uma raiz quadrada de 4 existe". O "há" é aqui usado em outro sentido. Ele quer dizer: o número 4 tem a propriedade de poder resultar da multiplicação de um número por ele mesmo, ou ainda, que se pode encontrar um número que multiplicado por si mesmo dê 4. Só podemos proferir esse juízo se antes tivermos formado a sentença $2^2 = 4$ (ou $(-2)^2 = 4$). Isto é o que ele tem em comum com os outros juízos existenciais como "Há homens".
27. Frege: Foi-me anteriormente objetado acerca do exemplo "Há raízes quadradas de 4" que se tratava de um juízo existencial. Agora, parece-me que o Sr. não mais o toma como um juízo existencial, porque não mais quer dizer: "Uma raiz quadrada de 4 existe".
28. Pünjer: "Há raízes quadradas de 4" é um juízo existencial.

---

29. Frege: (A propósito de 18) A sentença "A idéia de isto foi formada a partir de uma afecção do isto sobre o eu" é evidente, caso seu conteúdo possa ser corretamente formado. Pois a expressão "A idéia de isto" não pode ser utilizada sem que antes tenhamos juízos como "A esta minha idéia algo corresponde" ou "Esta minha idéia foi formada a partir de uma afecção sobre o eu". Só então podemos chamar de "isto" o que produziu a afecção, ao que corresponde a minha idéia.
30. Pünjer: [A sentença] "A idéia de isto foi formada a partir de uma afecção do isto sobre o eu" é apenas uma outra maneira de dizer "A esta minha idéia corresponde algo de experienciável".

6. Tal é a formulação que se encontra literalmente no manuscrito (Ed. al.).

31. Frege: Sua observação (20) entendo do seguinte modo: Quando o Sr. quer dizer que *B* é uma idéia que não é formada apenas a partir do eu, mas que o é a partir de uma afecção de algo sobre o eu, então o Sr. o poderia expressar assim: "O objeto de *B* é algo de experienciável". Ambas as expressões expressam o mesmo. Não é assim?
32. Pünjer: Em vez de "*B* é uma idéia que etc." eu diria "A idéia *B* é etc.", presumindo de imediato que *B* é uma idéia.
33. Frege: Admito que não seja evidente e nem supérfluo dizer: "A idéia *B* não é formada apenas a partir do eu, mas é formada a partir de uma afecção de algo sobre o eu". Pois nem toda idéia é formada a partir de uma afecção sobre o eu, ou pelo menos trata-se de uma questão controvertida. A negação desta [sentença] seria: "A idéia *B* não é formada a partir de uma afecção de algo sobre o eu", se supormos que *B* seja uma idéia. Essa negação tem perfeitamente sentido e portanto não é supérfluo e nem evidente asserir a sentença: "A idéia *B* é formada a partir de uma afecção de algo sobre o eu" ou, se preferir, seu equivalente "O objeto de *B* é algo de experienciável". Mas se essas duas sentenças têm o mesmo sentido, então no juízo "A negação da sentença 'A idéia *B* é formada a partir de uma afecção de algo sobre o eu' tem sentido" pode-se colocar "O objeto de *B* é algo de experienciável" em lugar de "A idéia *B* é formada a partir de uma afecção de algo sobre o eu", para assim se obter o juízo: A negação da sentença "O objeto de *B* é algo de experienciável" tem sentido. O que contradiz sua colocação anterior.
34. Pünjer: Não há qualquer contradição em qualificar de legítima a negação do enunciado "O objeto da idéia *B* é algo de experienciável" e, por outro lado, de ilegítima a negação do enunciado "O objeto *B*'[7] é algo de experienciável".
35. Frege: Se o entendo corretamente, a contradição se resolve da seguinte maneira: Na expressão "O objeto da idéia", [a palavra] "objeto" é empregada em um outro sentido do que em "O objeto *A* é algo de experienciável".
36. Pünjer: Não. A palavra "objeto" tem o mesmo significado, mas "objeto da idéia" significa algo diferente de "objeto".
37. Frege: O fato de aditarmos "da idéia" produz alguma restrição [no sentido dessa palavra]?

7. B' indica o objeto da idéia B (Ed. al.).

38. Pünjer: "Objeto" em si significa apenas objeto que não é apenas objeto da idéia, mas [objeto] da experiência. Com efeito, a oposição a ser estabelecida deveria ser assim constituída: objeto da idéia/objeto da experiência.

---

39. Pünjer: (A propósito de (26) e (27)): O número não é algo de experienciável no mesmo sentido em que o é Paulo.
40. Frege: Distingue assim dois sentidos em "algo de experienciável"?
41. Pünjer: Não. Também o número é algo de experienciável no mesmo sentido geral. O conceito de algo de experienciável é o mesmo em ambos os casos; é o mesmo que chamo de experienciável: seja número, coisa ou cor.
42. Frege: O Sr. não entende por "algo de experienciável" sempre algo que independe daquilo de que se pode ter experiência (*etwas selbständiges Erfahrbares*)?
43. Pünjer: Também é algo de experienciável aquilo que não pode ser experienciável independentemente, como por exemplo uma cor, que só é algo de experienciável quando em alguma coisa.
44. Frege: O Sr. declarou (26) que não diria "4 existe". Está aqui empregando [a palavra] "existir" no mesmo sentido de "capaz de ser experienciável"?
45. Pünjer: Sim, eu me retrato de ter declarado que não diria "4 existe" ou "uma raiz quadrada de 4 existe".
46. Frege: A diferença entre os juízos "Há homens" e "Há raízes quadradas de 4" não está no "há", mas na diferença entre os conceitos de "homem" e de "raiz quadrada de 4". Por homem, entendemos algo de independente, enquanto que por raiz quadrada de 4, não.
47. Pünjer: Concordo.
48. Frege: É correta a sentença "*A* é algo de experienciável", se por *A* se entender uma idéia?
49. Pünjer: Sim, uma idéia é algo de experienciável.
50. Frege: Há idéia de uma idéia?
51. Pünjer: Há idéias de idéias.
52. Frege: O Sr. certa vez caracterizou a idéia como uma imagem flutuante (*schwankendes Bild*), uma seqüência de intuições (*Reihe von Anschauungen*). Quais são então as intuições que originam a idéia da idéia de *A*?
53. Pünjer: As diversas atividades formadoras da idéia A (*Tätigkeiten der Vorstellung A*) são essas intuições.

54. Frege: Será que 'atividade formadora de idéia' (*Tätigkeit des Vorstellens*) significa a mesma coisa que 'idéia'[8]?
55. Pünjer: Sim.
56. Frege: É portanto errôneo distinguir entre atividade formadora de idéia (*Tätigkeit des Vorstellens*) e idéia?
57. Pünjer: Sim.
58. Frege: De suas observações (18) e (20), segue-se que "Isto é algo de experienciável" tem o mesmo significado que "À esta minha idéia corresponde algo de experienciável". Aqui, "algo de experienciável" se elucida (*erklärt*) por si mesmo.
59. Pünjer: Mas isso não deve ser tomado como uma elucidação. Insisto que a expressão "A idéia de isto" sempre pode ser empregada.
60. Frege: Toda idéia tem um objeto?
61. Pünjer: Sim. Toda idéia tem necessariamente um objeto. "Objeto de uma idéia" é o mesmo que "Conteúdo de uma idéia".
62. Frege: O conteúdo da idéia *A* é o mesmo que *A*?
63. Pünjer: Não. O que é representado numa idéia (*Vorstellungsbild*) é a imagem flutuante. Para ser exato, cabe distinguir aquilo que é representado numa idéia da idéia. O que é representado não inclui a atividade formadora (*Tätigkeit*).
64. Frege: O objeto da idéia é diferente do que é representado na idéia?
65. Pünjer: Sim.
66. Frege: Quando se vê uma *fata Morgana*[9] ou se tem uma alucinação, qual é o objeto da idéia? (Ficou sem resposta).

---

67. Frege: Admite que a negação da sentença "O objeto de *B* é algo de experienciável" tem perfeitamente sentido?
68. Pünjer: Sim.
69. Frege: Admite que se possa chamar de *A* ao objeto da idéia *B*?
70. Pünjer: Sim.
71. Frege: Então admitirá também que a negação da sentença "*A* é algo de experienciável" tem perfeitamente sentido?

8. Essas aspas não existem no original (N. do T.).
9. Expressão italiana que literalmente quer dizer 'fada Morgana'. Esta é a designação de uma miragem das costas da Itália e da Sicília (N. do T.).

72. Pünjer: Sim. Mas, em sua pergunta (8), por *A* não se entendia um objeto da idéia, mas como um objeto da experiência.
73. Frege: Eu não disse nem que *A* deva ser um objeto da experiência nem que deva ser um objeto da idéia; pelo contrário, deixei a questão totalmente em aberto. Por tal razão, entendi sua resposta (10) de maneira mais geral do que agora o Sr. parece entender. Aliás, era mais natural entender *A* como objeto da idéia, já que eu usara em (6) a expressão "idéia de *A*".
74. Pünjer: Mas ali entendia-se por *A* expressamente um objeto da experiência.
75. Frege: Não vejo assim. Talvez façamos algum progresso recolocando a questão nos seguintes termos: Admite que haja objetos de idéias, mas de idéias que não resultam de uma afecção de algo sobre o eu?
76. Pünjer: Sim.
77. Frege: Admite que objetos de idéias que não resultam de uma afecção de algo sobre o eu não existem?
78. Pünjer: Sim.
79. Frege: Disto se segue que há objetos de idéias, mas de idéias que não resultam da afecção de algo sobre o eu, objetos que não existem. Mas se o Sr. vier a usar a palavra "existir" no mesmo sentido da expressão "há", então o mesmo predicado foi simultaneamente asserido e não asserido do mesmo sujeito. A inferência é correta, pois o conceito "objetos de idéias que não resultam de uma afecção de algo sobre o eu" é exatamente o mesmo em ambas as premissas, e também exatamente o mesmo na conclusão. Concorda com isto?
80. Pünjer: Sim. Mas a palavra "há" está sendo aqui mal empregada.
81. Frege: Se assim é, escolha uma outra expressão que melhor expresse a coisa.
82. Pünjer: Tal não é possível, pois [qualquer outra expressão] novamente não conseguiria dizer o que deve ser expresso.
83. Frege: Temos aqui portanto, em sua opinião, uma contradição real na qual sucumbe necessariamente a razão; pois não se pode evitá-la pela simples modificação da maneira de se expressar.
84. Pünjer: Antes de negarmos a existência de algo, devemos representá-lo como existente para a seguir negar-lhe a existência. Mas não creio que possamos ir muito além por este meio. Como explica a expressão "Há homens"? (O que se segue foi suprimido pois se revelou circular; e assim voltamos uma vez mais à pergunta:)
85. Pünjer: Como explica "Há seres vivos"?
86. Frege: Explico-o assim: A sentença que *A*, não importa o que se entenda por *A*, não cai sob o conceito de "ser vivo" é falsa.

87. Pünjer: O que se deve pensar por *A*?
88. Frege: O significado dado a *A* não deve estar submetido a qualquer restrição. Caso se deva dizer algo a seu respeito, só pode ser algo de óbvio, como por exemplo, $A = A$.
89. Pünjer: O equívoco consiste na insistência de se pensar *A* como um ente (*Seiendes*), com a conseqüência de que o Sr. está apenas pressupondo o "há".
90. Frege: Não submeto *A* à restrição de que deva ser um ente (*Seiendes*), a menos que por ente (*Sein*) não se entenda algo de óbvio, caso em que não há nenhuma restrição.
91. Pünjer: Que é "óbvio"?
92. Frege: Entendo por óbvio um enunciado que em nada determina aquilo a respeito do qual ele versa.
93. Pünjer: O Sr. só conhece enunciados que versem sobre algo?
94. Frege: [A expressão] "Há enunciados que não versam sobre nada" significa "Há juízos em que o sujeito não pode ser distinguido do predicado".
95. Pünjer: O que o Sr. entende por algo do qual um enunciado pode ser feito?
96. Frege: Algo que pode ser feito sujeito de um juízo.

[97.] Frege: [A sentença] "Alguns homens são alemães" significa o mesmo que "Há homens alemães". Como da sentença "Sachse é um homem" se segue "Há homens", do mesmo modo das sentenças "Sachse é um homem" e "Sachse é alemão" segue-se "Alguns homens são alemães" ou "Há homens alemães".

[98.] Pünjer: [A sentença] "Alguns homens são alemães" não significa o mesmo que "Há homens alemães". Apenas de "Sachse é um homem" não é lícito inferir "Há homens"; para isto é ainda necessária a sentença "Sachse existe".

[99.] Frege: Sobre isso diria o seguinte: Se "Sachse existe" quer significar "A palavra 'Sachse' não é um som vazio, mas designa algo", então é correto exigir que a condição "Sachse existe" seja satisfeita. Isto porém não é uma nova premissa, mas o pressuposto evidente de todas as nossas palavras. As regras da lógica sempre pressupõem que as palavras empregadas não sejam vazias, que as sentenças sejam expressões de juízos, e que não se esteja jogando com meras palavras. Portanto, para que "Sachse é

um homem" expresse um juízo real, a palavra "Sachse" tem que designar algo, e neste caso não é necessário empregar uma outra premissa para se inferir "Há homens". A premissa "Sachse existe" é supérflua, caso ela deva significar algo de distinto deste pressuposto evidente de todo o pensamento humano. Poderia o Sr. dar um exemplo em que uma sentença da forma "*A* é um *B*" tenha um sentido e seja verdadeira, sendo *A* o nome de um indivíduo, enquanto que "Há *B*'s" seja falso? "Alguns homens são alemães" também pode ser assim expressa "Uma parte dos homens cai sob o conceito de 'alemão'". Aqui, por parte, não cabe entender uma parte vazia, mas uma parte que contenha indivíduos. Se assim não fosse, se não existisse nenhum homem que fosse alemão, deveríamos antes dizer: "Nenhum homem é alemão"; mas esta é a contraditória de "Alguns homens são alemães". Donde, de "Alguns homens são alemães" pode-se inferir inversamente "Há homens alemães". De "Alguns homens são alemães" também se pode...[10]

[II. EPÍLOGO DE FREGE]

Formulação da questão em debate:

Consideramos as sentenças "Esta mesa existe" e "Há mesas". A questão é saber se a palavra "existe" da primeira sentença tem essencialmente o mesmo conteúdo que o "há" da segunda.

Creio que tampouco o Sr. contestou que também existe uma certa diversidade [entre essas sentenças] quanto aos predicados, pois a diferença não está apenas na diversidade dos sujeitos; mesmo assim, o Sr. sustentou que o significado era essencialmente o mesmo. Poderia agora me dizer o que, em sua opinião, elas têm em comum, e onde começa e termina essa diversidade?

Temos ainda que nos entender sobre como conceber um juízo particular afirmativo envolvendo a palavra "alguns". Em lógica, creio que de modo geral isto se faz compreensível através de complementos esclarecedores como "talvez todos, pelo menos um". Assim sendo, [a sentença] "Alguns homens são negros" teria como significado "Alguns, talvez todos, mas pelo menos um homem é negro".

10. Aqui finda o manuscrito (Ed. al.).

Se houver acordo quanto a esse tópico, então um juízo particular afirmativo como "Alguns homens são negros" pode ser convertido em "Alguns negros são homens". A impressão de absurdo que surge, num primeiro momento, está em que involuntariamente se é levado a acrescentar em pensamento "mas alguns negros não são homens". Este pensamento secundário (*Nebengedanke*)[11] fica excluído pelo aditamento de "talvez mesmo todos".

O Sr. propunha que a expressão "Homens existem" tivesse o mesmo significado que "Algo existente é homem". Esta última expressão porém oferece a dificuldade, por força de sua forma gramatical, de ter como predicado não a existência mas ser um homem. Mas é a existência o que de fato se quer asserir. Para que isto ocorra, podemos expressá-la, lingüisticamente, convertendo "Alguns homens existem" em "Alguns, talvez todos, mas pelo menos um homem existe". Este último enunciado é que tem o mesmo significado que "Homens existem".

Tal como sempre entendi, é sua concepção que a diferença de significado de "existe" nas duas sentenças "Leo Sachse existe" e "Alguns homens existem" é do mesmo gênero que a diferença de significado de "é alemão" nas duas sentenças "Leo Sachse é alemão" e "Alguns homens são alemães", de tal modo que "existe" está para "existem" das duas primeiras sentenças, como "é alemão" está para "são alemães" das duas últimas. Escolhi intencionalmente os mesmos sujeitos – "Leo Sachse" e "Alguns homens" – em ambos os casos para evidenciar essa correspondência. Creio que a única razão para se omitir o "alguns" na sentença "Homens existem" é para escapar à objeção: "nem todos?"

Creio poder agora interpretar corretamente sua estratégia nos seguintes termos.

De início, era seu desejo me levar a aceitar que a sentença "Há homens" ('*Es gibt Menschen*') significa o mesmo que "Entre os entes, algum é homem" ('*Unter dem Seieden ist einiges Mensch*') ou "Uma parte dos entes é homem" ('*Ein Teil des Seinden ist Mensch*') ou ainda "Algum ente é homem" ('*Einiges Seiende ist Mensch*'). Em lugar de "ente" (*Seiendes*), o Sr. também empregou, como tendo o mesmo significado, as expressões "algo de experienciável", "existente" (*existierend*) e "aquilo cuja idéia resulta de uma afecção sobre o eu". Tratam-se, creio eu, de meras variantes não essenciais. Elas apenas acrescentam ou suprimem algumas dificuldades secundárias. Contudo, a dificuldade principal continua sempre a mesma, e a idéia geral de seu plano de ataque também. Mas além disso, eu

11. Sobre esta noção, cf. cap. 7, n. 71 (N. do T.).

ainda deveria admitir que o verbo "ser" ("existir") fora empregado no mesmo sentido que na sentença "Leo Sachse *é*" ou "existe". Tivesse eu admitido tudo isso, e a vitória teria sido toda sua[12].

É bem verdade que posso admitir que a expressão "Há homens" significa o mesmo que "Algo existente é homem", sob a condição da palavra "existir" ser algo de evidente, que ela a rigor não tenha nenhum conteúdo. E o mesmo se aplica às demais expressões que o Sr. utilizou em lugar de "existe".

Caso, porém, a sentença "Leo Sachse é" seja óbvia, então o "é" não pode ter o mesmo conteúdo que o "há" da sentença "Há homens", já que esta última não expressa algo de óbvio. De fato, se o Sr. reformular a sentença "Há homens" sob as expressões "Homens existem" ou "Entre os entes, algum é homem", então o conteúdo enunciado não se encontra em "existe" nem em "ente" etc. E este é o πρῶτον ψεῦδος [13] a partir do qual o sr. foi conduzido a fazer juízos contraditórios; vale dizer, o erro de sustentar que o conteúdo do que é dito em "Alguns homens existem", ou "Algo existente é homem", ou ainda "Homens existem" está contido na palavra "existe". Este não é o caso, pois essa palavra só contém a forma de um predicado, tal como está contida na cópula "é" a forma do predicado da sentença "O céu é azul". Nessa sentença [i. é., em "Homens existem"], "existe" deve ser tomada como uma mera palavra formal (*Formwort*)[14], à semelhança do [que ocorre em alemão com o] pronome "es" em "Es regnet"[15]. Tal como a linguagem, por carecer de um *sujeito* gramatical se utilizou do [no caso da língua alemã, do pronome] "es", aqui, à falta de um *predicado* gramatical, inventou-se o "existe".

Que o conteúdo do que é predicado não reside na palavra "existe", evidencia-se pelo fato de que em lugar do "existe" também se pode dizer "é igual a si mesmo". A sentença "Há homens" significa o mesmo que "Alguns homens são

12. Entre os distintos significados assumidos pelo 'é', Frege aqui destaca o que convencionalmente se denomina de existencial. Cf. supra p. 113 n. 6. O 'é' de existência assume, na verdade, duas acepções. A primeira fica bem caracterizada mediante o emprego do quantificador existencial e do sinal de igualdade, isto é, $(\exists x)(d = x)$ e pode ser exemplificado pela sentença 'Deus é'. A segunda se esclarece pelo uso quantificador existencial e o modo convencional de expressar a predicação, vale dizer, $(\exists x)(Hx)$ e pode ser ilustrado por sentença, como 'Há homens' ou 'Há pelo menos um homem'. No presente artigo Frege se detém sobretudo no estudo da primeira acepção acima descrita (N. do T.).
13. A expressão grega *prōton pseudos* pode ser literalmente traduzida por 'a primeira coisa falsa' ou 'o erro inicial'; e por tal razão é tomada como expressando tanto "o núcleo do erro" ou "o equívoco fundamental" como "o ponto de partida falacioso". É nesta última acepção que está aqui em questão (N. do T.).
14. Cf. cap. 4, n. 18 (N. do T.).
15. O exemplo de Frege não tem paralelo em língua portuguesa. Mas tanto em inglês (com o *it* em *it is raining*) como em francês (com o *il* em *il pleut*) temos equivalentes perfeitos do que se passa em alemão com o *es* em *es regnet* (N. do T.).

iguais a si mesmos" ou ainda "Algo igual a si mesmo é homem". Nada de novo se apreende sobre *A* seja na sentença "*A* é igual a si mesmo" ou na sentença "*A* existe". Nenhuma dessas duas sentenças pode ser negada. Em ambas, pode-se substituir *A* pelo que quer que seja, e ambas continuarão sempre corretas. Elas não destinam *A* a uma entre duas classes com o objetivo de separá-lo de um *B* que não pertence a essa classe. Ao se proferir a sentença "*A* é igual a si mesmo", só se pode ter por objetivo enunciar a lei lógica de identidade, e nunca de melhor conhecer *A*. Assim, como se poderia afirmar que "existe" nas sentenças "Esta mesa existe" e "Mesas existem" tem o mesmo significado, assim também pode-se dizer que o predicado "igual a si mesmo" nas sentenças "Esta mesa é igual a si mesma" e "Mesas são iguais a si mesmas" tem o mesmo sentido. Mas há que se reconhecer aqui que os juízos "Esta mesa existe" e "Esta mesa é igual a si mesma" são totalmente evidentes, e que portanto em tais juízos nenhum conteúdo propriamente é atribuído a esta mesa. Assim como as sentenças do tipo "Homens existem" são denominadas de juízos existenciais, admitindo que o conteúdo do que é predicado esteja na palavra "existe", assim também uma sentença como "Alguns homens são iguais a si mesmos" poderia ser chamada de um juízo de identidade[16], e "Há homens" seria um juízo de identidade. Em geral, sempre que se tente provar que o conteúdo do que é predicado na sentença "Há homens" está no "existe" da sentença "Homens existem", pode-se substituir o "existe" por "igual a si mesmo", sem incorrer em novos equívocos. É o que me esforcei em mostrar.

Mas, se no juízo "Homens existem" o conteúdo do que é predicado não está no "existe", onde então estaria? Respondo: na forma do juízo particular. Todo juízo particular é um juízo existencial que pode ser transformado na forma "Há ...". Por exemplo, "Alguns corpos são leves" é o mesmo que "Há corpos leves", ou "Alguns pássaros não voam" é o mesmo que "Há pássaros que não voam" etc. Mais difícil é, inversamente, transformar um juízo da forma "Há..." em um juízo particular. Pois a palavra "alguns", fora de um contexto, não tem sentido; é uma palavra formal (*Formwort*) como "todo", "cada", "nenhum" etc. que só exerce uma função lógica no contexto de uma sentença. Tal função consiste em pôr dois conceitos em uma certa relação lógica. Na sentença "Alguns homens são negros" os conceitos "homem" e "negro" são postos nessa relação. Assim sendo, necessita-se sempre de dois conceitos quando se quer formar um juízo particular. Na verdade, a sentença "Há peixes voado-

16. No manuscrito fregeano está 'juízos de identidade' (Ed. al.).

res" facilmente se transforma em "Alguns peixes voam", já que dispomos de dois conceitos: "peixe" e "capaz de voar". Mais difícil se torna, porém, dar à sentença "Há homens" a forma de um juízo particular. Se definirmos homem = ser vivo racional, podemos dizer que "Alguns seres vivos são racionais", que tem o mesmo significado que "Há homens", caso seja correta essa definição.

Só nos é dado aplicar esse procedimento caso se possa decompor o conceito em duas notas (*Merkmale*). Há um outro modo de fazer, estreitamente relacionado a este. Se, por exemplo, cumpre transformar "Há negros", pode-se dizer que negro = negro que é homem, já que [no presente contexto] o conceito "negro" é subordinado ao conceito "homem". Aqui também temos dois conceitos, e assim é dado dizer que "Alguns homens são negros" ou "Alguns negros são homens". Isto, porém, só é pertinente para o caso particular do conceito "negro". Para a sentença "Há bétulas" cumpre-se escolher um outro conceito superordenante, digamos, "árvore"[17]. Caso se queira generalizar esse processo, deve-se procurar um conceito que subordine todos os demais conceitos. Tal conceito, caso ainda se deseje utilizar esse termo, não mais terá nenhum conteúdo, já que sua extensão é ilimitada; pois todo conteúdo só se dá sob certa delimitação da extensão. Para um tal conceito, poderíamos escolher a de "ser igual a si mesmo", pois admitimos que "Há homens" é o mesmo que "Há homens iguais a si mesmos" ou que "Alguns homens são iguais a si mesmos" ou que "Algo igual a si mesmo é homem".

A linguagem [corrente] se valeu de um recurso distinto. Para formar um conceito sem conteúdo, valeu-se da cópula, isto é, a mera forma de um predicado sem conteúdo[18]. Na sentença "O céu é azul", o predicado é "é azul", mas estritamente falando o conteúdo desse predicado está na palavra "azul". Se esta for suprimida, o que resta é um predicado sem conteúdo: "O céu é". Assim se forma um quase-conceito, "ente", sem conteúdo, [já que] de extensão infinita[19]. Pode-se então dizer: homens = homens que têm ente; "Há homens" é o mesmo que "Alguns homens são" ou "Algum ente é homem". Aqui, portanto, o verdadeiro conteúdo do predicado não está na palavra "ente", mas na forma do juízo particular. A palavra "ente" é um mero expediente criado pela lingua-

17. Façamos bétula = bétula que é árvore; o que torna lícito dizer 'Algumas árvores são bétulas' ou 'Algumas bétulas são árvores' (N. do T.).

18. Cf. cap. 6, n. 7 (N. do T.).

19. Em princípio, a palavra *Seiendes* pode ser traduzida tanto por 'ser' como por 'ente'. Aqui, optamos pelo termo 'ente' (de *ens*, particípio presente do verbo *esse*) que abrange tudo o que *é*, todo o *sendo*. Para se harmonizar com a explicação dada por Frege, cumpre compreendê-la como "o que existe ou pode existir de qualquer maneira que seja" ou ainda, do ponto de vista lógico, como *das allgemeinste Prädikat eines Dinges* (H. Schmidt, *Philosophisches Wörterbuch*, Leipzig, 1931 s.v. *Sein*). (N. do T).

gem para se poder empregar a forma do juízo particular. Quando os filósofos falam do "Ser absoluto", temos na verdade um endeusamento da cópula.

Agora torna-se fácil entender como se chegou a tal situação. Percebia-se que a sentença "Há um centro de massa da terra" não é evidente, e que assim sendo o predicado tinha um conteúdo. Isto se explica tanto melhor na medida em que se acreditava que esse conteúdo esteja contido na palavra "existe", quando se emprega a locução "Um centro de massa da terra existe". Assim, adicionou-se à palavra "existe" um conteúdo, sem que se pudesse explicar em que consistia esse conteúdo.

Pode-se agora mostrar como Pünjer, por força do πρῶτον ψεῦδος[20] de ver na palavra "existe" o conteúdo do predicado de "Homens existem", fora levado a realizar afirmações contraditórias. Pude facilmente convencê-lo de que a negação da sentença "*A* é algo de experienciável" era impossível, caso algo de experienciável = é = existe. Ele tinha também que concordar que atribuir a algo a experienciabilidade nada acrescenta. Mas, por outro lado, ele queria salvaguardar o conteúdo dos enunciados de experienciabilidade. Em sentenças como "Esta mesa é algo de experienciável", "Esta mesa existe" algo seguramente é dito, algo que não é supérfluo ou evidente. Assim, ele seria impelido à contradição por não considerar como supérflua e evidente a negação da sentença "Esta mesa é algo de experienciável". Ele tinha que privar a locução "algo de experienciável" de todo conteúdo sem, contudo, torná-la vazia de conteúdo. Pünjer queria interpretar o conteúdo do juízo "Isto é algo de experienciável" nos seguintes termos: "A idéia de isto não é uma alucinação, não é uma mera construção minha; pelo contrário, é uma idéia formada pela afecção do isto sobre o eu". A tal interpretação cabia objetar que as expressões "idéia de isto" e "afecção do isto sobre o eu" só seriam legitimamente formadas após ter sido formado o juízo "A esta minha idéia corresponde algo". Se a esta minha idéia nada corresponde, então a expressão "idéia de isto" carece de sentido, e assim a sentença como um todo seria também sem sentido. Pünjer, de pronto, modificou sua explicação, sem contudo admiti-la como errônea, da seguinte maneira: "O objeto da idéia *B* é algo de experienciável", quer dizer, "A idéia *B* é formada a partir de uma afecção sobre o eu". Disto eu podia então inferir que a negação da sentença "O objeto da idéia *B* é algo de experienciável" tinha perfeitamente sentido. Mas Pünjer dissera anteriormente que a negação da sentença "*A* é algo de experienciável" era impossível. Agora

20. Esta expressão grega na presente passagem está sendo tomada não na acepção anterior, mas no sentido de "equívoco fundamental" ou "o núcleo de erro" (N. do T.).

devemos restringir de algum modo essa afirmação e dizer: Se *A* é objeto da experiência, então a negação da sentença "A é algo de experienciável" é impossível, mas se *A* é objeto da idéia, então a negação daquela sentença é possível. Nestes exemplos vemos confirmada a impossibilidade simultânea de atribuir ao predicado "algo de experienciável" um sentido que não seja evidente e de sustentar, em sua generalidade, que a negação da experienciabilidade de algo carece de sentido. Ao mesmo tempo, vemos que o conceito de algo de experienciável só ganha um conteúdo pela delimitação de sua extensão. De fato, todos os objetos se dividem em duas classes: os objetos da experiência e os objetos da idéia. Os últimos não caem todos sob o conceito "algo de experienciável". Disto podemos ainda inferir que nem todo conceito está subordinado ao conceito de "algo de experienciável"; assim, por exemplo, o conceito de "objeto da idéia" não o é. Disto ainda se segue que o conceito de algo de experienciável não é em geral adequado para transformar um juízo com "há" em um juízo particular. Pünjer, para justificar de modo geral a aplicabilidade da expressão "objeto da idéia", tinha que sustentar que toda idéia tem um objeto, que existem objetos de idéias não formadas a partir de uma afecção sobre o eu. Se a isto aplicarmos sua definição de sentença que encerre "há", uma contradição há de resultar. De fato, conforme essa definição, o juízo "Há objetos de idéias não formadas a partir de uma afecção sobre o eu" tem o mesmo significado que "Sob algo de experienciável está algo que cai sob o conceito de 'objeto de uma idéia não formada a partir de uma afecção sobre o eu'". Mas de acordo com a explicação de Pünjer, os objetos de idéias não formadas a partir de uma afecção sobre o eu não são algo de experienciável. Assim, chegamos à sentença "Sob algo de experienciável está algo que não é experienciável".

Isso ainda pode ser dito nos seguintes termos. Das duas premissas:

1) Há objetos de idéias não formadas a partir de uma afecção sobre o eu;
2) Objetos de idéias não formadas a partir de uma afecção sobre o eu não são algo de experienciáveis;

segue-se a seguinte conclusão:

Há objetos de idéias, objetos que não são algo de experienciável. Isto é uma contradição, uma vez que foi concedido que "há" expressa o mesmo tipo de existência que encerra a locução "algo de experienciável".

De modo geral, pode-se dizer o seguinte:

Caso se queira dar à palavra "ser" ("*Sein*") um conteúdo tal que por ela a sentença "*A* é" não seja nem supérflua nem evidente, há que se admitir que, sob

certas circunstâncias, a negação da sentença "*A* é" seja possível, vale dizer, que há sujeitos aos quais cumpre recusar o ser (*Sein*). Mas assim sendo, o conceito de "ser" não mais se torna adequado para explicar de modo geral o uso do "há" de maneira tal que "Há *B*'s" significa o mesmo que "Algum ente cai sob o conceito *B*". Mas, se aplicarmos essa explicação à sentença "Há sujeitos, aos quais o ser deve ser recusado", obtemos então "Algum ente cai sob o conceito não-ente" ou ainda "Algum ente não é". Tal é inevitável, sempre que um conteúdo qualquer, não importa qual, for atribuído ao conceito de ente. É necessário que se entenda por ser[21] algo totalmente evidente, para que seja correta a explicação da equivalência significativa entre "Há *B*'s" e "Algum ente é *B*".

Por tal razão, a contradição ainda perdura se dissermos que "A existe" significa "A idéia de *A* é originada a partir de uma afecção sobre o eu". Aqui surgem contudo outras dificuldades, das quais só algumas quero mencionar.

Quando Leverrier se pôs a questão de se havia outros planetas para além da órbita de Urano, ele não se indagava se sua idéia de planeta para além da órbita de Urano se originou, ou podia ter-se originado, a partir de uma afecção sobre o eu. Quando se discute se há um Deus, não se discute a questão de se nossa idéia de um Deus se originou, ou podia ter-se originado, a partir de uma afecção sobre o eu. Muitos dos que acreditam que há um Deus negarão que a idéia que eles têm a seu respeito tenha se originado a partir de uma afecção imediata do seu eu por Deus, pois aqui só se pode tratar de uma afecção imediata. Isto porém é apenas secundário. O fundamental é o seguinte:

Pode-se dizer que os significados da palavra "existe" nas sentenças "Leo Sachse existe" e "Alguns homens existem" não apresentam uma maior diferença do que aquelas que apresentam os significados da expressão "é alemão" nas sentenças "Leo Sachse é alemão" e "Alguns homens são alemães". Mas as sentenças "Alguns homens existem" ou "Algo existente é homem" só significam o mesmo que "Há homens" caso o conceito de "existente" ("*Existierendes*") estiver superordenando o conceito de "homem". Assim, se essas duas formas de expressão devem ter em geral o mesmo significado, então o conceito de "existente" deve superordenar qualquer outro conceito. Isto [só é possível caso ocorram os itens seguintes]: se a palavra "existe" ("*existieren*") significar algo de totalmente evidente; se, por via de conseqüência, na sentença "Leo Sachse existe" absolutamente nada seja dito; e se na sentença "Alguns homens existem" o conteúdo do predicado não esteja na palavra "existe". A existência

21. Esse grifo não se encontra no original (N. do T.).

expressa pela palavra "há" não se encontra na palavra "existe", mas na forma do juízo particular. "Alguns homens são alemães" é um juízo existencial tão bom quanto "Alguns homens existem". Mas tão logo se dê à palavra "existe" um conteúdo para predicar uma coisa singular, então esse conteúdo pode também se tornar a nota (*Merkmal*)[22] de um conceito, de um conceito sob o qual cai a coisa singular da qual a existência está sendo predicada. Por exemplo, se alguém tudo dividir em duas classes,

1) O que está em minha mente, idéias, sentimentos etc. e
2) O que está fora de mim,

e afirmar desta última que ela existe, então ele poderá depreender (*auffassen*) a existência como uma nota (*Merkmal*) do conceito de centauro, embora não haja centauros. Eu não deveria reconhecer nada como centauro que não estivesse fora de minha mente; isto quer dizer que meras idéias ou sentimentos presentes em mim não serão por mim chamados de centauros.

A existência expressa por "há" não pode ser uma nota de um conceito do qual ela é uma propriedade, justamente pelo fato de ser sua propriedade. Na sentença "Há homens", parece que se fala de indivíduos que caem sob o conceito "homem", embora fale-se apenas do conceito "homem". O conteúdo da palavra "existe" não pode ser tomado como uma nota de um conceito, porque "existe", tal como é empregado na sentença "Homens existem", não tem nenhum conteúdo.

Donde se vê quão facilmente se é induzido pela linguagem a falsas interpretações, e qual a importância que deve ter para a filosofia nos libertar do domínio da linguagem. Quando se tenta construir um sistema de sinais sobre fundamentos totalmente distintos e com meios completamente diversos, como tentei fazer em minha conceitografia (*Begriffsschrift*)[23], acaba-se, por assim dizer, pondo o dedo nas falsas analogias da linguagem.

22. Cf., sobre esta noção, cap. 6, n. 31 (N. do T.).
23. Frege aqui se refere a seu livro de 1879 (N. do T.).

10

CARTA DE G. FREGE A H. LIEBMANN (1900)

Bad Steben, 25. VIII. 1900.

Caro doutor

Dado seu interesse pela fundamentação da geometria, estou lhe enviando uma cópia de minha correspondência com o prof. Hilbert sobre seu *Festschrift*[1]. Assim poderá compreender, com mais exatidão, quão importante me é o fato de estar o senhor a par de minhas concepções sobre tal questão. É bem verdade que a referida correspondência está suspensa há mais de um semestre, mas tenho uma carta do prof. Hilbert em que este promete prosseguir[2]. Lá, em Jena, talvez me aguarde uma carta que minha mulher, com a

Pela primeira vez publicada em G. Frege, *Kleine Schriften*, ed. I. Angelelli, Hildesheim, Olms, 1967, pp. 404-406; e posteriormente republicada em G. Gabriel *et al.* (ed.), G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg, Meiner, 1976, pp. 149-151. Na verdade, para entender o contexto da presente carta é mister levar em conta os seguintes fatos. Entre 1895 e 1903, Frege manteve uma breve correspondência com Hilbert (quatro cartas de Frege e cinco de Hilbert), a propósito de algumas concepções desse eminente matemático. Frege, contudo, não tendo ficado plenamente satisfeito com o que fora discutido, veio a publicar, em 1903, o artigo 'Sobre os Fundamentos da Geometria', em duas partes, e em 1906 um longo artigo, de mesmo título, em três partes, em que aprofunda ainda mais suas considerações críticas. É nesse contexto polêmico que Frege escreve a Liebmann com o fito de esclarecer o que cumpre entender, de um lado, por objeto, conceito de primeiro nível e conceito de segundo nível, e de outro, por subordinação, cair sob (subsunção) e cair em. A inobservância de tais distinções, pondera Frege, leva inevitavelmente aos equívocos a que Hilbert sucumbiu (N. do T.).

1. Trata-se da obra *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, Leipzig, 1899 (N. do T.).
2. Trata-se da carta de Hilbert datada de 15 de janeiro de 1900, cf. Frege, *Briefwechsel*, p. 20 (N. do T.).

melhor das intenções, haja retido. Lendo mais uma vez minhas cartas, tenho a impressão de que outrora julgava as investigações de Hilbert de modo mais indulgente do que agora o faço. Devo, não obstante, aguardar a resposta do prof. Hilbert. Devido à importância dos temas versados, a ele sugeri que considerasse uma posterior publicação de nossa correspondência[3].

Gostaria, agora, de tentar ver se consigo expor, de forma sucinta, o que entendo por conceitos de segundo nível (*Stufe*). Inicialmente, devo enfatizar a profunda diferença que se dá entre conceito e objeto, que é a de que nunca um conceito pode substituir um objeto, nem um objeto pode substituir um conceito. Aqui não se podem dar, propriamente, definições[4]. A essência dos conceitos pode ser caracterizada pelo fato de se dizer que têm uma natureza predicativa. Um objeto nunca pode ser predicado de algo. Quando digo "A estrela vespertina é Vênus", não estou predicando [o objeto] Vênus, mas predicando [o conceito] *coincidente com Vênus*. Lingüisticamente, os nomes próprios correspondem aos objetos, os termos conceituais (*nomina appellativa*)[5] aos conceitos. Na linguagem corrente, no entanto, a radicalidade de tal distinção é um tanto atenuada pelo fato de palavras que são originariamente nomes próprios (*v.g.*,"Lua") poderem tornar-se termos conceituais, e palavras que eram originariamente termos conceituais (*v. g.*, "deus")[6] poderem tornar-se nomes próprios[7]. Os termos conceituais se apresentam ora com o artigo indefinido, ora com palavras como "todos", "alguns", "muitos" etc[8]. Aqui ocorrem ainda inúmeras outras sutilezas que não analisarei. Entre objetos e conceitos (de primeiro nível) dá-se a relação de subsunção (*Subsumtion*)[9]: um objeto cai sob[10] um conceito; por ex., Jena é uma cidade universitária. Os conceitos são geralmente constituídos de

3. Carta a Hilbert datada de 6 de janeiro de 1900, cf. *Briefwechsel*, p. 20.
4. Para Frege tanto conceito como objeto são indefíveis, rigorosamente falando (N. do T.).
5. No original lemos *nomina appellation*, que é, evidentemente, um lapso (N. do T).
6. Frege aqui registra não o termo alemão *Gott*, 'Deus', mas a palavra latina *deus* que, como se sabe, é um substantivo comum, já que os antigos romanos eram politeistas (N. do T.).
7. Frege se vale, para argumentar, do duplo movimento que vai, em alguns casos, de um nome próprio (*v. g.*, 'Lua'= 'o satélite da terra') para um nome conceitual ('lua'= 'satélite', como em 'Fobos é uma das luas de Marte'), e o movimento inverso que vai de um nome conceitual (*v. g.*, 'deus' = 'divindade') para um nome próprio ('Deus'= 'O Ser supremo e absoluto criador de todas as coisas'). N. do T.
8. O critério fundamental pelo qual Frege distingue conceito de objeto talvez seja o de que o artigo definido singular sempre indica tratar-se de um objeto, enquanto que o artigo indefinido e os quantificadores sempre precedem termos conceituais (N. do T.).
9. O substantivo *Subsumtion*, 'subsunção', é aqui empregado para expressar a relação que tem lugar entre um objeto e um conceito de primeiro nível. Tal é o que se dá, por exemplo, entre o objeto Jena e o conceito de primeiro nível *cidade universitária*. Observe-se que mais de um objeto (*e. g.*, Coimbra, Oxford, Salamanca etc.) pode cair sob ou estar subsumido ao conceito *cidade universitária* (N. do T.).
10. Frege se vale do verbo *fallen*, 'cair', ora seguido da preposição *unter*, 'sob', ora da preposição *in*, 'em', para expressar dois tipos de relações. Pelo verbo *fallen unter*, 'cair sob', é expressa a relação que se

conceitos componentes, as notas (*Merkmale*). Em *roupa de seda preta* temos as notas *roupa*, *seda* e *preta*. Um objeto que caia sob esse conceito tem essas notas como suas propriedades (*Eigenschaften*). Uma *nota* em relação a um conceito é uma *propriedade* de todo objeto que cai sob esse conceito[11]. Totalmente distinta da subsunção é a subordinação (*Unterordnung*)[12] de um conceito de primeiro nível a um outro conceito de primeiro nível, como em "Todos os quadrados são retângulos". As *notas* do conceito subordinante (retângulo) são também *notas* do conceito subordinado (quadrado).

Quando digo "Há pelo menos uma[13] raiz quadrada de 4", nada estou predicando de 2 ou –2, mas sim do conceito *raiz quadrada de 4*. Nem estou dando uma nota desse conceito, pelo contrário, esse conceito já deve ter se tornado totalmente conhecido. Não estou escolhendo nenhum componente desse conceito, mas apenas evidenciando uma certa propriedade (*Beschaffenheit*) pela qual esse conceito se distingue, por exemplo, do conceito número *primo par maior que 2*. Comparo as diferentes notas de um conceito com as pedras que compõem uma casa, e comparo o que é predicado em nossa sentença com uma propriedade da casa, por exemplo sua espacialidade. Também aqui algo é predicado; mas não um conceito de primeiro nível, mas um conceito de segundo nível. De modo similar a que Jena se relaciona à *cidade universitária*, também se relaciona *raiz quadrada de 4* à existência-há (*Esgiebtexistenz*)[14]. Temos aqui

dá entre um conceito de primeiro nível e um objeto, o que nunca pode ocorrer entre conceitos. Pelo verbo *fallen in*, 'cair em', é expressa a relação que existe entre um conceito de segundo nível e um conceito de primeiro nível, o que nunca ocorre entre objetos (N. do T.).

11. Aqui nos é dito que um objeto tem propriedades (*Eigenschaften*), enquanto o conceito tem notas (*Merkmalen*). Mas observa Frege que o objeto tem como propriedades exatamente as notas do conceito sob o qual ele cai. Cf. cap. 6, n. 31 (N. do T.).
12. Frege utiliza a palavra *Unterordnung*, 'subordinação', para expressar a relação que se dá entre um conceito de primeiro nível e outro conceito também de primeiro nível. De fato, um conceito de primeiro nível pode estar subordinado a outro de primeiro nível, desde que um seja nota do outro. O conceito *vertebrado* é subordinado ao conceito *animal*, já que *animal* é uma nota do conceito *vertebrado*, mas não é uma propriedade dele. Por outro lado, tanto *animal* como *vertebrado* são *propriedades* de Sócrates, vale dizer, Sócrates cai sob ambos os conceitos. De igual modo, como todos os quadrados são retângulos, segue-se que o conceito ser *quadrado* (*i. e.*, ter lados iguais e ângulos iguais) está subordinado ao conceito ser *retângulo* (*i. e.*, quadrilátero de ângulos retos). Com isto, *ser retangular* é uma das notas do conceito *quadrado* (N. do T).
13. Em alemão, a asserção da existência – aquilo que é simbolizado por '$(\exists x) fx$' – tanto pode ser lida como *es existiert ein x derart, dass* ... (= 'existe um *x* tal que ...') como *es gibt ein x, für das gilt* ...(= 'há um *x*, para o qual vale ...'). Frege, como vemos acima, se vale desta última forma – *es gibt ein x* ... –, e assim constrói a sentença '*es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 4*' (= 'há pelo menos uma raiz quadrada de 4'). Em nossa nomenclatura lógica portuguesa, contudo, é corrente a utilização da forma 'existe pelo menos um ...' Mas, pelas razões que veremos na nota a seguir, evitamos nesta tradução seguir essa alternativa (N. do T.).
14. O termo por Frege cunhado *Esgibtexistenz* é formado, de um lado, por *Es gibt*, 'há', e, de outro, por *Existenz*, 'existência'. Temos assim algo como existência-do-tipo-há (*i. e.*, a existência introduzida

conceitos componentes, as notas (*Merkmale*). Em *roupa de seda preta* temos as notas *roupa, seda* e *preta.* Um objeto que caia sob esse conceito tem essas notas como suas propriedades (*Eigenschaften*). Uma *nota* em relação a um conceito é uma *propriedade* de todo objeto que cai sob esse conceito[11]. Totalmente distinta da subsunção é a subordinação (*Unterordnung*)[12] de um conceito de primeiro nível a um outro conceito de primeiro nível, como em "Todos os quadrados são retângulos". As *notas* do conceito subordinante (retângulo) são também *notas* do conceito subordinado (quadrado).

Quando digo "Há pelo menos uma[13] raiz quadrada de 4", nada estou predicando de 2 ou –2, mas sim do conceito *raiz quadrada de 4.* Nem estou dando uma nota desse conceito, pelo contrário, esse conceito já deve ter se tornado totalmente conhecido. Não estou escolhendo nenhum componente desse conceito, mas apenas evidenciando uma certa propriedade (*Beschaffenheit*) pela qual esse conceito se distingue, por exemplo, do conceito número *primo par maior que 2.* Comparo as diferentes notas de um conceito com as pedras que compõem uma casa, e comparo o que é predicado em nossa sentença com uma propriedade da casa, por exemplo sua espacialidade. Também aqui algo é predicado; mas não um conceito de primeiro nível, mas um conceito de segundo nível. De modo similar a que Jena se relaciona à *cidade universitária*, também se relaciona *raiz quadrada de 4* à existência-há (*Esgiebtexistenz*)[14]. Temos aqui

dá entre um conceito de primeiro nível e um objeto, o que nunca pode ocorrer entre conceitos. Pelo verbo *fallen in*, 'cair em', é expressa a relação que existe entre um conceito de segundo nível e um conceito de primeiro nível, o que nunca ocorre entre objetos (N. do T.).

11. Aqui nos é dito que um objeto tem propriedades (*Eigenschaften*), enquanto o conceito tem notas (*Merkmalen*). Mas observa Frege que o objeto tem como propriedades exatamente as notas do conceito sob o qual ele cai. Cf. cap. 6, n. 31 (N. do T.).
12. Frege utiliza a palavra *Unterordnung*, 'subordinação', para expressar a relação que se dá entre um conceito de primeiro nível e outro conceito também de primeiro nível. De fato, um conceito de primeiro nível pode estar subordinado a outro de primeiro nível, desde que um seja nota do outro. O conceito *vertebrado* é subordinado ao conceito *animal*, já que *animal* é uma nota do conceito *vertebrado*, mas não é uma propriedade dele. Por outro lado, tanto *animal* como *vertebrado* são *propriedades* de Sócrates, vale dizer, Sócrates cai sob ambos os conceitos. De igual modo, como todos os quadrados são retângulos, segue-se que o conceito ser *quadrado* (*i. e.*, ter lados iguais e ângulos iguais) está subordinado ao conceito ser *retângulo* (*i. e.*, quadrilátero de ângulos retos). Com isto, *ser retangular* é uma das notas do conceito *quadrado* (N. do T).
13. Em alemão, a asserção da existência – aquilo que é simbolizado por '$(\exists x) fx$' – tanto pode ser lida como *es existiert ein x derart, dass ...* (= 'existe um *x* tal que ...') como *es gibt ein x, für das gilt ...*(= 'há um *x*, para o qual vale ...'). Frege, como vemos acima, se vale desta última forma – *es gibt ein x ...* –, e assim constrói a sentença '*es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 4*' (= 'há pelo menos uma raiz quadrada de 4'). Em nossa nomenclatura lógica portuguesa, contudo, é corrente a utilização da forma 'existe pelo menos um ...' Mas, pelas razões que veremos na nota a seguir, evitamos nesta tradução seguir essa alternativa (N. do T.).
14. O termo por Frege cunhado *Esgibtexistenz* é formado, de um lado, por *Es gibt*, 'há', e, de outro, por *Existenz*, 'existência'. Temos assim algo como existência-do-tipo-há (*i. e.*, a existência introduzida

uma relação entre conceitos, porém não uma relação entre conceitos de primeiro nível, como se dá na subordinação, mas uma relação entre um conceito de primeiro nível e um conceito de segundo nível – relação similar à subsunção de um objeto sob um conceito de primeiro nível[15]. Aqui, o conceito de primeiro nível desempenha um papel similar ao do objeto no caso da subsunção, e o conceito de segundo nível desempenha um papel similar ao do conceito de primeiro nível[16]. Poder-se-ia neste caso também falar de subsunção, mas essa relação [entre o conceito de segundo nível e o de primeiro nível], embora similar, não é igual à [relação de] subsunção de um objeto sob um conceito de primeiro nível. Quero dizer que um conceito de primeiro nível cai (não sob, mas) em um conceito de segundo nível. A diferença entre conceitos de primeiro e segundo níveis é tão radical quanto a diferença entre objetos e conceitos de primeiro nível, pois objetos nunca podem substituir conceitos. Assim sendo, um objeto nunca pode cair sob um conceito de segundo nível – o que não seria falso, mas sem sentido. Se alguém quisesse tentar enunciar algo como tal, não chegaria nem a um pen-

por um quantificador), e que aqui traduzimos não por 'há-existência', mas pela construção 'existência-há'. Mas cumpre observar que essa tradução é estritamente *ad hoc*. Se tivéssemos que introduzir em língua portuguesa uma palavra para expressar literalmente a forma alemã *Esgibtexistenz*, ela teria que ser, para sermos conseqüentes com nossas práticas lingüísticas, 'existência-existe', já que em português a quantificação existencial é correntemente expressa não por 'há', mas por 'existe' – como 'Existe um x tal que...' (N. do T.).

15. Eis como Frege explica a importância de estabelecer diferentes níveis entre conceitos se utilizando desta noção tão básica do cálculo dos predicados. Seja a sentença 'Há um x tal que P(x)', que é expressa no formalismo fregeano da seguinte maneira: ~(x) ~ P(x). Caso se remova o nome do conceito de primeiro nível P da sentença acima obtemos o seguinte conceito de segundo nível: ~(x) ~ ( ) (x), que, ao tomar o conceito de primeiro nível P como argumento, será verdadeiro caso haja pelo menos um objeto que caia sob P; quando esse objeto não existir, a função será falsa. A existência é assim um conceito de segundo nível, representada pela expressão '~(x) ~ ( ) (x)', e se aplica a conceitos de primeiro nível, sob os quais caem (ou não) objetos. Fregeanamente falando, a existência nunca poderá ser uma nota de um conceito de primeiro nível. Segundo Frege, não nos deparamos aqui com uma questão puramente formal, lingüística ou convencional. Como ele sustenta, é absurdo dizer 'Há África' ou 'Há Carlos Magno' (ainda que seja admissível dizer, em linguagem corrente, 'A África existe' e 'Carlos Magno existiu'; mas esta existência – por assim dizer – não é exatamente do mesmo tipo da existência-há e nem está comprometida com uma teoria filosófica sobre o existir). De modo geral, para Frege, é sem sentido dizer tanto que indivíduos existem, como que a existência é um conceito de primeiro nível. Em outras palavras, pela expressão 'Há raízes quadradas de 4' não se está falando de indivíduos que sejam raízes quadradas de 4 (isto é, não se está falando de +2 ou –2), nem se está dizendo que tais indivíduos existem, pois tampouco faz sentido dizer que 'Há dois', vale dizer, quantificar constantes individuais. Essa expressão fala do conceito de primeiro nível *ser raiz quadrada de 4* e afirma que este dispõe de instâncias (N. do T.).

16. Aqui, o conceito de segundo nível é *Há pelo menos uma raiz quadrada de 4*, cujo argumento é o conceito de primeiro nível *raiz quadrada de 4*, conceito este que, como dissemos acima, dispõe de dois objetos que caem sob ele: +2 e –2. Esse conceito de segundo nível de forma geral pode ser assim representado: 'Há pelo menos uma ( )', cujo argumento é sempre um conceito de primeiro nível que pode ter ou não instâncias, e fica encerrado entre os parênteses (N. do T.).

samento verdadeiro nem a um pensamento falso, mas a pensamento nenhum. Publiquei certa vez na revista de Avenarius algo sobre conceito e objeto[17].

Outra característica distintiva do conceito de primeiro nível é dada pela seguinte sentença: se um objeto cai sob este conceito, então existe um outro objeto que cai sob este conceito. Aqui, temos um segundo conceito de segundo nível[18]. A partir desses dois conceitos, que são notas de segundo nível, podemos formar um terceiro conceito de segundo nível no qual caem todos os conceitos de primeiro nível sob os quais caem pelo menos dois objetos distintos. Tal seria o caso dos conceitos *número primo*, *planeta* e *homem* que caem nesse conceito de segundo nível[19]. Parece-me que o prof. Hilbert, de início, tinha em mente definir conceitos de segundo nível; mas ele não os distingue dos conceitos de primeiro nível. Assim se esclarece o que sempre permanece obscuro nas exposições de Hilbert: que o mesmo conceito é aparentemente definido de duas maneiras. É que não se trata em absoluto do mesmo conceito! De início, é um conceito de segundo nível, mas a seguir é um conceito de primeiro nível que cai no conceito precedente. O engano que aqui se dá está no fato de confundir um com outro e aplicar a mesma palavra (digamos, "ponto") a ambos os conceitos[20].

Cordiais saudações,

G. Frege

17. Frege se refere a seu artigo 'Sobre o Conceito e o Objeto', acima traduzido (N. do T.).
18. Aqui é dito que sempre que um objeto cai sob um conceito de primeiro nível, um conceito de segundo nível pode ser formulado assegurando a existência desse conceito de primeiro nível, isto é, o fato de ele não ser vazio (N. do T.).
19. Na medida em que podem exercer a função de argumento em conceitos de segundo nível como *Há pelo menos um* ( ) (N. do T.).
20. Em grandes linhas e sem a possibilidade de ser preciso, a crítica de Frege a Hilbert decorre do seguinte: Hilbert entende que um sistema de axiomas, na verdade, pode atuar como definição implícita dos termos não-lógicos que neles ocorrem. Mas seu sistema de axiomas para a geometria encerra, observa Frege, duas dificuldades. A primeira é a que ele não consegue fixar apenas um sentido para esses termos, ficando assim o significado de 'ponto', 'linha' etc. indeterminado. A segunda consiste no fato de que os axiomas de Hilbert encerram conceitos tanto de primeiro nível (como 'ponto', linha', 'entre' etc.) como de segundo nível, isto é, os quantificadores 'todo' e 'há'. Os conceitos de primeiro nível 'ponto', 'reta' etc. podem ser assim tomados não apenas como variáveis, mas também como argumentos de conceitos de segundo nível. Deste modo, a conjunção desses axiomas pode ser encarada não como definindo mais de um conceito de primeiro nível, mas como definindo um conceito relacional de segundo nível que origina mais de uma interpretação. E se assim é, não mais se pode dizer que seus axiomas sejam propriamente os axiomas da geometria (N. do T.).

11

QUE É UMA FUNÇÃO?
(1904)

Ainda não está fora de dúvida o que em Análise[1] significa a palavra "função"[2], apesar de seu uso freqüente há muito tempo. Nas explicações deste termo, sempre ocorrem uma, outra ou ambas das seguintes expressões: 'expressão do cálculo' e 'variável'[3]. Notamos também uma oscilação no uso desse termo, pelo fato de que se denomina de função por vezes ao que determina o modo de dependência, ou talvez ao próprio modo de dependência, e por vezes à variável dependente[4].

Publicado pela primeira vez sob o título de 'Was ist eine Funktion?' em *Festschrift L. Boltzmann. Gewidmet zum 60. Geburtstage*, 20 Februar, 1904, Leipzig, J. A. Barth, pp. 656-666. E republicado em G. Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, organizado por G. Patzig (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966), pp. 81-90.

1. Frege faz neste artigo uso freqüente da palavra 'Análise' e 'Análise pura'. Cf. Introdução, n. 74 (N. do T.).
2. Essas considerações se restringem às funções de um único argumento.
3. Sem aspas no original. De fato, as primeiras explicações dadas à noção de função não fazem a devida separação entre essa noção e expressão que contém variáveis. Assim, L. Euler (1748) define função 'como qualquer expressão analítica de algum modo constituída de quantidades variáveis e números ou quantidades constantes' (*Introductio, ab init.*). Mais tarde, Dirichlet (1837) procurou generalizar e dissociar noção de função de sua expressão, no que foi seguido por Riemann (1851), Hankel (1870) e pelos demais matemáticos. Um passo decisivo foi dado por Frege (1891, 1904) ao elucidar a noção de variável, ao admitir que qualquer entidade pode vir a ser argumento e valor de uma função, ao distinguir, com nitidez, expressão funcional de função e, por último, ao indicar que as funções se hierarquizam em níveis ou ordens (N. do T.).
4. Em face da notação '$f(x)$', Frege parece querer aqui dizer que em matemática, ao que se observa, tem-se chamado de 'função' ora 'f', ora '$f(x)$' e ora a variável 'x', dita variável independente (N. do T.).

Mais recentemente, a palavra "variável" tem predominado nas definições propostas[5]. Mas essa palavra, por sua vez, necessita de ser explicada. Toda variação se efetua no tempo. E assim sendo, se a Análise trata de variáveis, deverá ocupar-se de ocorrências temporais. Sucede, porém, que ela nada tem a ver com o tempo; e não vem ao caso o fato de que ela se aplique a ocorrências temporais. A Análise tem também aplicações em geometria, nas quais o tempo não entra em cogitação. Esta é uma dificuldade básica com que sempre nos deparamos, quando queremos, a partir de exemplos, atingir o âmago da questão. Pois, assim que tentamos mencionar uma variável, deparamo-nos com algo que varia no tempo e, assim sendo, que não pertence à Análise pura. E, no entanto, se é que as variáveis tenham de ser objeto da Análise, deve ser possível exibir uma variável que não envolva nada de estranho à aritmética[6].

Se já a noção de variação oferece dificuldade, deparamo-nos com ainda outra quando perguntamos o que é que varia. A resposta que inicialmente se obtém é: uma grandeza. Procuremos um exemplo. Podemos denominar de grandeza uma barra, na medida em que tenha um comprimento. Toda variação do comprimento da barra, resultante, por exemplo, do aquecimento, dá-se no tempo; mas nem barras, nem comprimentos são objetos da Análise pura. Essa primeira tentativa de exibir uma grandeza variável em Análise vem assim a malograr, e do mesmo modo malograrão muitas outras tentativas; pois as grandezas de comprimento, de superfície, de ângulo, de massa não são objetos da aritmética. Entre todas as grandezas, só pertencem à aritmética os números. E exatamente por essa ciência não levar em conta a natureza das grandezas, cuja medida fornece mediante um número, em cada caso particular, torna-se ela capaz das mais diversas aplicações. Perguntamo-nos portanto: são as variáveis da Análise números variáveis?[7] Que mais poderiam ser, se é que

5. A palavra 'variável' (bem como 'constante' e 'parâmetro') foi introduzida no cálculo por Leibniz. Embora não o diga aqui, Frege não nutre qualquer simpatia pela palavra *Veränderlich*, 'variável', já que – em seu modo de pensar – ela insinua tratar-se de um objeto que varia. Na verdade, por 'variável' cumpre entender, sustenta Frege, não um objeto que varia, mas um mero sinal ou símbolo que indica indefinidamente zero, um ou mais objetos. Por tal razão, ele julga que essa palavra deva ser substituída pelo termo *Buchstabe*, 'letra'. Tal fato, porém, não significa que a isto se resume sua contribuição à presente questão. Na verdade, há quem sustente que Frege foi 'o primeiro a dar uma explicação clara e consistente para a noção de variável'. Cf. T. W. Bynum (ed.), G. Frege, *Conceptual Notation*, Oxford, 1972, p. 61, n. 33. Tal é o objeto de estudo das próximas páginas (N. do T.).

6. A respeito do uso que faz Frege da palavra 'aritmética', cf. Introdução, n. 8 (N. do T.).

7. Uma variável não é, segundo Frege, nem um número variável nem um número indeterminado ou indefinido – já que tais coisas não existem. Uma variável também não é um sinal (ou símbolo ou letra) que se refere ou designa de modo determinado, mas um sinal (ou símbolo ou letra) que indica de modo indeterminado. Como qualquer símbolo, seja qual for sua utilização, ela não está submetida a nenhuma oscilação ou flutuação (mas apenas ao princípio da substituibilidade) e, assim, se mantendo estável e delimitada (N. do T.).

devam pertencer à Análise? A que atribuir que quase nunca se diz "número variável", enquanto é tão freqüente se dizer "grandeza variável"? Esta última expressão soa mais aceitável que "número variável". Mas isto dá lugar à dúvida: existem números variáveis? Todo número, por acaso, não mantém invariáveis suas propriedades? Certamente, pode-se dizer que 3 e π são, evidentemente, números invariáveis, constantes; mas, não obstante, há também números variáveis. Quando digo, por exemplo, "o número que dá o comprimento desta barra em milímetros", estou denominando um número, e este é variável, já que a barra nem sempre mantém o mesmo comprimento; portanto, designei, por essa expressão, um número variável. Comparemos esse exemplo com o seguinte: Quando digo "o rei deste reino", estou designando um homem. Há dez anos, o rei deste reino era um ancião; agora, o rei deste reino é um jovem. Assim sendo, com essa expressão, designei um homem que era um ancião e que agora é um jovem. Algo de errôneo existe aqui. A expressão "o rei deste reino" não designa, sem uma indicação temporal, nenhum homem; no entanto, assim que se acrescente uma indicação temporal, pode designar univocamente um homem; mas, nesse caso, esta indicação temporal é um componente necessário da expressão, e teremos uma outra expressão se dermos uma outra indicação temporal. Nessas duas sentenças, o sujeito não será absolutamente o mesmo. Do mesmo modo, a expressão "o número que dá o comprimento desta barra em milímetros", sem indicação temporal, não designa em absoluto nenhum número. Caso se acrescente uma indicação temporal, passa então a designar um número, por exemplo 1000; mas este é invariável. Com outra indicação temporal, obtemos uma outra expressão que pode vir a designar um outro número, digamos, 1001. Se dizermos "Há meia hora, o número que dava o comprimento desta barra em milímetros era um cubo; agora o número que dá o comprimento desta barra em milímetros não é um cubo", não temos, em ambos os casos, o mesmo sujeito do enunciado. O número 1000 não cresceu até 1001, mas foi substituído por este. Ou será que o número 1000 é o mesmo que o número 1001, apenas com outro aspecto? Se algo varia, temos sucessivamente diferentes propriedades e estados de um mesmo objeto. Se tal objeto não fosse o mesmo, não teríamos sujeito algum do qual pudéssemos predicar a variação. Uma barra se dilata quando aquecida. Enquanto isto se dá, ela permanece a mesma. Se, em vez disso, a barra fosse retirada e substituída por outra mais comprida, não poderíamos dizer que ela crescera. Um homem envelhece, mas se, no entanto, não pudéssemos reconhecê-lo como o mesmo, não teríamos nada de que pudéssemos predicar o envelhecer. Apliquemos isto ao número. Quando um número varia, o que permanece o mesmo? Nada. O

número portanto não varia, já que nada temos de que possamos predicar a variação[8]. Um número cúbico jamais se torna um número primo, e um número irracional jamais se torna um número racional.

Não há, pois, números variáveis, e isto se comprova pelo fato de que não temos nomes próprios para números variáveis. Malogramos em nossa tentativa de, através da expressão "o número que dá o comprimento desta barra em milímetros", designar um número variável. Mas não designamos mediante "*x*", "*y*", "*z*" números variáveis? Emprega-se, é certo, este modo de falar, mas essas letras não são nomes próprios de números variáveis, do mesmo modo que "2" e "3" são nomes próprios de números constantes; pois os números 2 e 3 se distinguem de um modo determinável, mas como distinguir as variáveis pretensamente designadas por "*x*" e por "*y*"? Não o saberíamos dizer. Não podemos especificar que propriedades tem x, e que propriedades distintas dessas tem y. Se algo associamos a essas letras, será para ambas a mesma representação vaga. Onde parece haver alguma diferença, trata-se apenas de aplicações, porém não falamos disso aqui. Posto que não podemos conceber cada variável em sua individualidade, não podemos atribuir nenhum nome próprio às variáveis.

O Sr. E. Czuber tentou evitar algumas das dificuldades aqui citadas[9]. Para se descartar do tempo, ele define variável como um número indefinido. Mas há números indefinidos? Dividem-se os números em definidos e indefinidos? Há homens indefinidos? Todo objeto não deve ser definido? Mas, por outro lado, o número n não é indefinido? Não conheço o número n, [o numeral] "*n*" não é o nome próprio de nenhum número, definido ou indefinido. Contudo, diz-se por vezes "o número *n*". Como isto é possível? Tal expressão tem que ser considerada em seu contexto. Considere-se o seguinte exemplo. "Se o número n for inteiro, então $\cos n\pi = 1$". Nesta sentença só o todo tem sentido; isoladamente, não o tem, nem seu antecedente, nem seu conseqüente. Não se pode dar uma resposta à questão de se o número n é inteiro, como tampouco à de se $\cos n\pi = 1$. Para que essa questão pudesse ser respondida, "*n*" teria de ser o nome próprio de um número, e neste caso seria necessariamente de um número definido. Escreve-se a letra "*n*" a fim de alcançar-se uma generalidade. Isso pressupõe

8. Os números são objetos fixos, definidos e determinados; eles portanto não variam. Uma barra aquecida varia seu comprimento em função do calor que recebe a cada instante de tempo. Mas, em cada instante seu comprimento é constante. Cumpre assim aditar uma indicação temporal. O que varia (ou pode variar) por substituição são os sinais numéricos (ou numerais) utilizados para *designar* (caso se trate de uma constante numérica) ou *indicar indefinidamente* (caso se trate de uma variável numérica) os números (N. do T.).

9. Cf. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Leipzig, Teubner, 1, § 2.

que, se viermos a substituir essa letra pelo nome próprio de um número, tanto o antecedente como o conseqüente ganharão um sentido.

Certamente, pode-se nesse caso falar de indefinição; mas "indefinido" não é aqui um adjetivo de "número", mas ['indefinidamente'] é um advérbio que modifica o verbo "indicar"[10]. Não cabe dizer que [a letra] "*n*" designa um número indefinido, mas cabe dizer que indica indefinidamente números[11]. E tal é o que se dá sempre que em aritmética se usam letras, exceto nos poucos casos (π, e, i) em que ocorrem como nomes próprios; mas então designam números definidos, invariáveis. Não há, pois, números indefinidos e, assim sendo, a tentativa de Czuber vem a malograr.

Em segundo lugar, Czuber procura remediar a outra dificuldade, isto é, a de que não se pode conceber uma variável enquanto distinta de outras. Denominando de domínio da variável (*Bereich der Variablen*) a totalidade dos valores que uma variável pode admitir, diz ele: "A variável x pode ser considerada definida se, para todo número real designado, pode-se dizer se ele pertence ou não ao domínio da variável." Embora proposto como uma definição [de variável], será que de fato o é? Já que não há números indefinidos, é impossível definir um certo número indefinido. Entende-se o domínio [da variável] como o que caracteriza a variável. Assim sendo, a domínios iguais correspondem variáveis iguais. Conseqüentemente, na equação "$y = x^2$", y seria a mesma variável que x, se o domínio de x for o dos números positivos.

Esta tentativa deve ser considerada como um insucesso, sobretudo porque a expressão "uma variável toma um valor" é bastante obscura. Uma variável deve ser um número indefinido; mas como pode um número indefinido assumir um número? Pois o valor é obviamente um número. Pode um homem indefinido assumir um homem definido? Diz-se, de fato, que um objeto assume uma propriedade; o número deve, pois, aqui desempenhar dois papéis: como objeto, denomina-se variável ou grandeza variável, e como propriedade, denomina-se valor. Por esse motivo, prefere-se a palavra "grandeza" à palavra "número", porque assim se pode encobrir o fato de que a grandeza variável e o valor que supostamente assume são no fundo o mesmo; de que não é absolutamente o caso de termos um objeto que assume sucessivamente propriedades distintas, e de que portanto não se pode falar de modo algum de variação.

10. Em português, os adjetivos não possuem, em geral, uso adverbial, contrariamente ao que ocorre em alemão. Daí inserirmos, aqui, o advérbio de modo 'indefinidamente' (N. do T.).
11. Sobre a noção de indicar ou indicar indefinidamente, ver cap. 11, n. 22 (N. do T.).

No que tange às variáveis, obtivemos o seguinte resultado. Grandezas variáveis podem, certamente, ser admitidas, mas não pertencem à Análise pura. Números variáveis não existem. E assim sendo, a palavra "variável"[12] não tem, na Análise pura, nenhuma justificação.

Como passar das variáveis para as funções? No que diz respeito ao essencial, o processo se dá sempre do mesmo modo[13] e, assim sendo, seguiremos a exposição de Czuber, que no § 3 escreve o seguinte: "Se a cada valor da variável real x, valor pertencente ao domínio desta variável, associa-se um número definido y, então y é definido de modo geral como sendo também uma variável e é denominado *função da variável real x*. Exprime-se este fato através de uma equação da forma $y = f(x)$".

De início, é surpreendente que y seja aqui denominado de um número definido, pois, sendo uma variável, devia ser um número indefinido. [A variável] y não é nem um número definido, nem um número indefinido; mas o sinal "y" foi incorretamente vinculado a uma pluralidade de números e, não obstante, fala-se a seguir como se se tratasse de um único número. Teria sido mais simples e mais claro dizer o seguinte: a todo número de um domínio x, associa-se um número; denomino a totalidade destes números de um domínio y. Certamente temos aqui um domínio y, mas nenhum y do qual pudéssemos dizer que é uma função da variável real x[14].

A delimitação do domínio parece ser irrelevante para a questão da natureza da função. Por que não poderíamos tomar como domínio a totalidade dos números reais, ou a totalidade dos números complexos incluindo os reais? O núcleo da questão, entretanto, reside em algo totalmente diverso, a saber, na palavra "associar". Mas, como saber que o número 5 está associado ao número 4? A pergunta é irrespondível enquanto não for, de algum modo, completada. Pois, consoante à explicação de Czuber, parece como se, para quaisquer dois números, já estivesse determinado se o primeiro associa ou não o segundo. Felizmente, Czuber acrescenta a seguinte observação: "A definição acima nada diz acerca da *lei* de associação, indicada de modo muito geral pela *característica*[15] f; pode-se estabelecê-la [tal lei de associação] das mais diferentes maneiras".

12. Trata-se da palavra e não da noção. Pois Frege entende, como dissemos acima, que em lugar de 'variável' melhor seria dizer 'letra' (N. do T.).

13. Frege nos diz aqui que os matemáticos de seu tempo seguem essencialmente a definição que se lê em Czuber, *Vorlesungen*, § 3. A seguir ele a examina e acaba por rejeitá-la (N. do T.).

14. Cumpre ter presente, de maneira resumida, que agora não mais se trata de domínio de uma variável, mas de domínio de uma função (N. do T.).

15. Ao chamar 'f' de 'característica' (*Charakteristik*), Czuber quer expressar que 'f', além de ser uma parte da *expressio analytica*, também encerra o núcleo caracterizador da lei (N. do T.).

A associação, portanto, dá-se segundo uma lei, e inúmeras leis desta espécie são concebíveis. Ora, então a expressão "*y* é uma função de *x*" não tem nenhum sentido, se não se a complementa indicando a lei pela qual se dá a associação. Isto é uma falha da definição [de Czuber]. Mas não é essa lei, cuja explicação não é dada, o mais importante? Porém, com isso, observamos que a variabilidade desapareceu inteiramente de vista, enquanto que a generalidade passou ao primeiro plano, pois é a esta que a palavra "lei" indica.

As diferenças entre as leis de associação estão correlacionadas com as diferenças entre as funções, e estas não mais podem ser encaradas como diferenças quantitativas. Basta pensar nas funções algébricas, na função logarítmica e nas funções elípticas, para nos persuadirmos imediatamente de que aqui se trata de diferenças qualitativas; uma razão a mais para não explicar as funções como variáveis. Se elas fossem variáveis, as funções elípticas seriam variáveis elípticas[16].

Em geral, expressa-se uma tal lei de associação mediante uma equação, em cujo lado esquerdo figura a letra "*y*" e, no lado direito, uma expressão matemática constituída de numerais, sinais de operação e da letra "*x*", como em

$$\text{``}y = x^2 + 3x\text{''}.$$

E assim se definiu a função como sendo uma tal expressão do cálculo[17]. Recentemente, esse conceito foi tido como por demais restrito. Tal inconveniente, no entanto, poderia ser facilmente remediado pela introdução de novos sinais na linguagem simbólica da aritmética[18]. Há, porém, uma outra objeção de maior peso, a saber, a de que a expressão do cálculo, como grupo de sinais, não pertence de modo algum à aritmética. A teoria formalista[19], segundo a

16. Embora existam funções elípticas, variáveis elípticas não existem; daí, a argumentação de Frege (N. do T.).

17. Frege se serve da palavra *Rechnungsausdruck*, 'expressão do cálculo', como equivalente a *expressio analytica*, 'expressão analítica', tradicionalmente utilizada pelos matemáticos da época. Esta última noção é relativamente obscura, já que é difícil determinar o que com ela exatamente se pretende dizer. Aparentemente, a expressão analítica é aquela parte da expressão funcional que expressa a lei (ou relação) entre números (ou outros objetos), isto é, aquela parte da expressão em que a lei de associação é enunciada (N. do T.).

18. Frege alerta para o fato de a noção de função ter sido aqui ampliada, abrangendo assim não só a aritmética e a análise matemática, como também a própria lógica. Mas alerta ainda que não se pode identificar a expressão funcional com a função propriamente dita (N. do T.).

19. Frege aqui se refere a teoria desenvolvida por E. Heine, J. Thomae e outros. Cf. Introdução, n. 34 (N. do T.).

qual os sinais são os objetos [de estudo] desta ciência, posso considerá-la como definitivamente refutada pela crítica que desenvolvi no segundo volume de minhas *Leis Fundamentais da Aritmética*[20]. A distinção entre sinal e coisa designada nem sempre foi feita com o devido rigor, de maneira que, em se falando de expressão do cálculo (*expressio analytica*), chegou-se, ou quase, a compreender sob tal expressão também sua referência[21]. Mas o que designa "$x^2 + 3x$"? Propriamente falando, absolutamente nada, pois a letra "x" indica apenas números, mas não os designa[22]. Se substituímos "x" por um numeral, obtemos uma expressão que designa um número; e, portanto, nada de novo. Como o próprio "x", a expressão "$x^2 + 3x$" apenas indica [sem designar]. Este uso [das letras] permite expressar a generalidade, como por exemplo nas sentenças

"$x^2 + 3x = x \cdot (x+3)$"

"se $x > 0$, então $x^2 + 3x > 0$".

Mas, onde está a função? Parece que cumpre distinguí-la da expressão do cálculo e de sua referência. Não obstante, não estamos tão distantes da pista correta. Cada uma das expressões "sen 0", "sen 1", "sen 2" refere-se a um certo número, mas elas apresentam um componente comum, "*sen*", pelo qual designamos o que é propriamente essencial à função seno. Esse "*sen*" corresponde ao "*f*" que Czuber diz indicar a lei, e a passagem de "*f*" para "*sen*" e, similarmente, à de "*a*" para "2", é a passagem de um sinal que indica para um sinal que designa. Segundo isto, "*sen*" referir-se-ia a uma lei. Isto, porém, não é de todo correto. A lei parece-nos mais bem expressada pela equação "$y = \text{sen}\ x$", onde o sinal "*sen*" é apenas uma parte, embora seja a parte caracterizadora da peculiaridade da lei. E não chegamos aqui ao que buscávamos, a função? Deste modo, "*f*" indicará efetivamente uma função. Deparamo-nos

20. Cf. Frege, *Grundgesetze der Arithmetic*, vol. II, § 86ss (N. do T.).
21. Frege observa que '$y = f(x)$', em que f indica (indefinidamente) a lei, e 'y = sen (x)', em que 'sen' se refere a (ou designa) uma lei, são coisas bem distintas. Aqui, 'f' é um mero sinal (letra, variável), enquanto 'sen' é uma certa lei designada por este sinal que é uma constante. O mesmo se dá com o termo aberto '$x^2 + 3x$', que por encerrar letras (variáveis) nada designa, mas apenas indica (N. do T.).
22. Note-se que o verbo 'designar' (*bezeichnen*) tem em Frege um uso especializado e técnico que o faz sinônimo de 'referir' (*bedeuten*). Toda variável ou expressão que envolva variáveis livres, falando fregeanamente, não designa nem se refere a nada. Em sua terminologia, as expressões que encerram variáveis livres são ditas 'indicar' (*andeuten*) ou 'indicar indefinidamente' (*unbestimmt andeuten*). N. do T.

aqui com o que distingue as funções dos números. O "*sen*" tem de ser complementado por um numeral, que não pertence, porém, à designação da função. Isto tem validade geral: o sinal de uma função é insaturado, necessitando de ser complementado por um numeral, que denominamos de sinal de argumento. O mesmo se dá com o sinal de raiz e o sinal de logaritmo. O sinal funcional não pode ocorrer, ao contrário dos numerais, isoladamente num dos lados da equação, mas deve ser complementado por um sinal que designe ou indique um número[23]. Mas a que se refere a conexão de um sinal funcional com um numeral, como "sen 1", "√1", "log1"? Estas expressões referem-se a números. Obtemos assim numerais[24] constituídos de duas partes distintas, em que uma parte insaturada é complementada por outra.

Essa necessidade de ser complementada pode-se pôr em evidência mediante parênteses vazios, por exemplo "sen ( )" ou "$( )^2 + 3( )$". Este modo de notar não deve ter nenhuma aceitação, embora seja, para esse caso, o procedimento mais apropriado e mais adequado para evitar a confusão que emerge de considerar o sinal de argumento como parte do sinal funcional[25]. Uma letra pode também ser utilizada para essa finalidade. Se, para tal, escolhemos "ξ", então "sen ξ" e "$\xi^2 + 3\,\xi$" são sinais funcionais. Mas, ao assim fazer, deve ficar estabelecido que "ξ" tem aqui apenas a tarefa de marcar os lugares onde o sinal que complementa a função deve ser introduzido. E será melhor também não empregar essa letra para nenhuma outra finalidade e, sobretudo, não a empregar em lugar de "x", que serve em nossos exemplos para expressar a generalidade.

Uma deficiência usual do modo de notar o quociente diferencial é que a letra "x" deve, por um lado, assinalar os lugares dos argumentos e, por outro, expressar a generalidade, como na equação:

$$\ll \frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx} = -\frac{1}{2}sen\frac{x}{2} \gg .$$

23. Frege diz que os sinais de função não devem ser escritos isoladamente, com em 'sen', 'log' '$\sqrt{\ }$' etc. Pelo contrário, tais sinais funcionais devem ser complementados por um símbolo (que designa ou indica, segundo o caso, um número) – como 'sen x', 'log 1', $\sqrt{3}$ etc. (N. do T.).

24. O termo 'numeral' (*Zahlzeichen*) é aqui empregado em acepção mais extensa que a usual. Em acepção estrita, este termo é aplicado apenas aos símbolos numéricos, como '1', '7' etc. Na acepção em que é aqui tomado, sendo mais ampla, visa a toda expressão que se refira a um número, como 'log1', 'sen 2' ou '√3' (N. do T).

25. Além disso, ela só é apropriada para o caso excepcional em que se visa a notar uma função isolada. Em "sen 2", "sen" por si só já designa a função.

Disso resulta uma dificuldade. De acordo com as convenções usuais do uso de letras em aritmética, deve-se obter um caso particular quando se substitui "x" por um numeral. Mas a expressão

$$\ll \frac{d \cos \frac{x}{2}}{d2} \gg$$

é ininteligível, uma vez que não se pode nela reconhecer a função. Não sabemos se trata de

$$\cos\frac{(\;)}{2}, \quad \text{ou} \quad \cos\frac{2}{(\;)}, \quad \text{ou} \quad \cos\frac{(\;)}{(\;)}.$$

Por essa razão, somos compelidos a empregar uma notação um tanto pesada:

$$\ll \left(\frac{d \cos \frac{x}{2}}{dx}\right)_{x=2} \gg$$

Mas ao assim fazer a maior desvantagem é que se torna mais difícil a compreensão da natureza da função.

A essa peculiaridade do sinal funcional, que denominamos de insaturação, corresponde, naturalmente, algo nas próprias funções. A estas também podemos chamar de insaturadas, caracterizando-as desse modo como essencialmente distintas dos números. Certamente isto não é uma definição, e nem é possível aqui[26]. Devo limitar-me a esboçar o que quero dizer por meio de uma expressão figurada, e para isso conto com a compreensão complacente do leitor.

26. A definição de H. Hankel em suas *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* (Universitätsprogramm, Tübingen, 1870), § 1, é imprestável, dado encerrar um círculo vicioso: ela contém a expressão "$f(x)$", que para definir pressupõe o que deve ser definido. [A definição de Hankel, a que Frege nesta nota faz menção, é a seguinte: 'Diz-se que $f(x)$ é uma função de x, se a cada valor de x, no interior de certo intervalo, estiver associado um e somente um valor determinado de $f(x)$' (N. do T.)].

Se uma função complementada por um número origina um número, denominamos este último de valor da função cujo primeiro número é o argumento. É corrente ler-se a equação "$y = f(x)$" assim: "y é uma função de x". Aqui dão-se dois equívocos: primeiro, o de traduzir o sinal de igualdade pela cópula; segundo, o de confundir a função com seu valor para um argumento. Desses erros surgiu a opinião de que a função é um número, fosse ele variável ou indefinido. Pelo contrário, vimos que tais números absolutamente não existem, e que as funções são essencialmente diferentes dos números.

A preocupação pela concisão introduziu inúmeras expressões inexatas na linguagem matemática, e estas, por sua vez, turvam o pensamento e produzem definições defeituosas. A matemática deveria ser, na verdade, um paradigma de clareza lógica. Na realidade, talvez não se achem, nos textos de uma ciência, tantas expressões errôneas e, conseqüentemente, tantos pensamentos errôneos como nos textos matemáticos. Nunca se deveria sacrificar a correção lógica à brevidade de expressão. Por essa razão, é da maior importância criar uma linguagem matemática que associe a precisão mais rigorosa com a maior brevidade possível. Para esse objetivo, o mais adequado seria uma conceitografia, um acervo de regras pelas quais se possam expressar imediatamente os pensamentos por meio de sinais escritos ou impressos, sem a mediação da linguagem falada.

12

DEZESSETE SENTENÇAS BÁSICAS DA LÓGICA
(c. 1906)

1. As combinações que constituem a essência do pensar[1] são especificamente distintas das associações de idéias[2] (*Vorstellungsassociationen*)[3].
2. A distinção não consiste apenas em um pensamento secundário (*Nebengedanken*) que fornece a base de justificação (*Rechsgrund*) para a combinação.
3. Ao pensar, não são propriamente idéias (*Vorstellungen)* que são combinadas, mas coisas, propriedades, conceitos, relações.
4. Um pensamento[4] sempre encerra algo que ultrapassa o caso particular, pelo o qual este último vem à consciência como que caindo sob algo de geral.

O presente artigo foi publicado postumamente sob o título, dado pelos organizadores, de '17 Kernsätze zur Logik', cf. G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, ed. H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach, Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1969, pp. 189-190. Uma questão controvertida é a data de sua redação. Segundo H. Scholz teria sido em 1906. Os editores de seu *Nachlass* datam de 1906 ou antes. Mas, G. Gabriel entende que remontaria a antes de 1892, e M. Dummett fixa, como os anos prováveis de sua redação, 1876 ou 1877.

1. Frege aqui nos diz que todo pensamento é dotado de uma certa complexidade que implica articulação e conexão entre partes, sejam estas simples (como palavras isoladas) ou complexas (como sentenças inteiras). Desse modo, algo que não possa entrar em uma conexão regular com outro ou outros elementos não pode ser parte de um pensamento (N. do T.).
2. Idéias e associações de idéias que não envolvam nexos adequados (como 'é', 'ou', 'e' etc.) não originam um pensamento (N. do T.).
3. A palavra *Vorstellung* não deve ser aqui tomada no sentido técnico que lhe deu Frege a partir de 1884. Cf. Introdução, n. 63 (N. do T.).
4. Lembramos que *pensamento* para Frege é aquilo que é expresso por uma sentença, vale dizer, aquilo que com freqüência é, pela lógica tradicional, chamado de 'juízo'. Cf. *supra* p. 28-29. (N. do T.).

5. A expressão lingüística que corresponde ao que é característico de um pensamento é a cópula ou a terminação pessoal do verbo[5].
6. O que pode servir de critério exterior para [determinar se] uma combinação constitui um pensamento (*die denkende Verknüpfung*) é ter sentido perguntar se é ela verdadeira ou não-verdadeira. Associações de idéias não são nem verdadeiras nem não-verdadeiras.
7. O que é verdadeiro, considero indefinível (*nicht erklärbar*)[6].
8. A expressão lingüística de um pensamento é uma sentença (*Satz*). Em sentido amplo, fala-se também da verdade de uma sentença[7].
9. Uma sentença pode ser verdadeira ou não-verdadeira, mas só se ela for a expressão de um pensamento.
10. A sentença 'Leo Sachse é um homem' só é a expressão de um pensamento caso 'Leo Sachse' designe algo. Do mesmo modo, a sentença 'Esta mesa é redonda' só será a expressão de um pensamento caso as palavras 'esta mesa' designem algo de determinado para mim, caso elas não sejam palavras vazias[8].
11. [O pensamento] '2 vezes 2 são 4' permanece verdadeiro mesmo que todos os homens chegassem a asserir, por força de uma evolução darwiniana[9],

5. O primeiro caso, da cópula, se exemplifica pela sentença 'Esta parede é verde'; o segundo, da terminação pessoal do verbo, pode ser ilustrado pela sentença 'Esta parede verdeja'. É na cópula ou na terminação pessoal do verbo que encontramos o traço característico do pensamento e em decorrência da sentença. Cf. *infra*, sentença básica 8 (N. do T.).
6. Segundo Frege, a verdade é indefinível e toda tentativa de defini-la redunda numa regressão ao infinito (N. do T.).
7. Frege entende que só o pensamento, o sentido da sentença, pode propriamente ser qualificado de verdadeiro ou de falso (N. do T.).
8. Frege entende que tanto os nomes próprios vazios (carentes de referência) como os pensamentos destituídos de valor de verdade (como os que encontramos na *Odisséia*) não têm interesse para a ciência. Em sua *Einleitung in die Logik* nos é dito, contudo, em tradução um tanto livre, o seguinte: 'Diz-se, por exemplo, que Odisseus não é um personagem histórico [...] e que o nome "Odisseus" nada designa, que não tem nenhuma referência (*Bedeutung*). Mas, mesmo que assim seja, nem por isso cabe negar um conteúdo de pensamento (*Gedankeninhalt*) a todas as sentenças da *Odisséia* em que o nome "Odisseus" ocorre. Mas suponhamos que nos convencemos [...] de que o nome "Odisseus" designa na *Odisséia* um homem. Expressaríamos com isto que as sentenças que encerram o nome "Odisseus" expressam pensamentos distintos? Não creio". Cf. *Nachgelassene*, p. 208 (N. do T.).
9. Não resisto à tentação de transcrever a seguinte passagem de H. Feigl: '*Even if some other world putting two and two objects together resulted invariably in a total of five objects, we should need ordinary (good old) arithmetic in order to formulate the rather peculiar natural laws of that world.*' M. Black (ed.) *Philosophical Analysis*, Nova York, Libraries Press, 1971, p. 121 (N. do T.).

que 2 vezes 2 sejam 5. Toda verdade é eterna[10] e independe do fato de ser pensada por alguém e da constituição psicológica daquele que a pensa[11].

12. A lógica parte, de início, da convicção de que existe uma distinção entre verdade e não-verdade.
13. Um juízo (*Urteil*) se justifica seja retroagindo-se a verdades já conhecidas, seja sem recorrer a outros juízos. Apenas o primeiro caso, o da inferência, é objeto da lógica[12].
14. As teorias do conceito e do juízo servem apenas como preparação para a teoria da inferência[13].
15. A tarefa da lógica é a formulação das leis (*der Gesetze*) pelas quais um juízo pode ser justificado por meio de outros, independentemente destes serem em si mesmos verdadeiros[14].
16. A observância das leis lógicas[15] só pode garantir a verdade de um juízo no caso em que sejam verdadeiros os juízos aos quais se retroage para justificá-lo.
17. As leis da lógica não podem ser justificadas por meio de uma investigação psicológica[16].

10. Frege entende que pensamentos verdadeiros são entes eternos existentes em um terceiro reino, como ele o chama, que nem é mental nem físico, distinto de ambos por ser intemporal e similar a ambos por ser em certo sentido fatual (N. do T.).
11. Isto é o que alguns denominam de 'platonismo semântico', que pode ser caracterizado como a teoria segundo a qual termos e sentenças expressam conceitos e proposições que são entes intemporais, só acessíveis por uma intuição supra-sensível (N. do T.).
12. Tal é sua definição primeira ou inicial de lógica: a inferência é o objeto de estudo da lógica. Posteriormente, ele virá a dizer que a lógica tem o verdadeiro (*Wahr*) ou o ser verdadeiro (*Wahrsein*) ou, melhor ainda, as leis do ser verdadeiro (*die Gesetze des Wahrseins*) como seu objeto de estudo, tal como a física tem o peso, o calor etc., e só secundariamente as regras de inferência (*Schlussregeln*). Cf. G. Frege, *Investigações Lógicas*, Porto Alegre, EDIPUCRS, p. 11. E, sendo assim, as leis da lógica – como ele nos diz em sua *Logik* – nada mais são do que um mero desdobramento do conteúdo da palavra 'verdadeiro' (*dass die logischen Gesetze nichts anderes sind als eine Entwicklung des Inhaltes des Wortes 'wahr'*. G. Frege, *Nachgelassene*, p. 3). N. do T.
13. É interessante notar – apenas isso – que Frege reitera, aqui, a tese tradicional de que a lógica (*i. e.*, a teoria da inferência) se desdobra, em complexidade crescente, em conceito, juízo e raciocínio. Mas, sendo a lógica a teoria da inferência, o conceito e o juízo só podem ser meras preparações (N. do T.).
14. A lógica é aqui vinculada à sintaxe, pelo menos em seu ponto de partida (N. do T.).
15. Segundo Frege, as leis da lógica são leis normativas (e não-descritivas) as mais gerais, que versam sobre juízos (e não sobre fatos do mundo) e prescrevem de maneira absoluta como devemos pensar (e não como de fato pensamos), e têm como objeto de estudo o verdadeiro e o falso (N. do T.).
16. As leis da lógica não versam sobre os processos empíricos envolvidos no ato de pensar. Elas não descrevem os eventos mentais como o fazem as leis da psicologia. Tais leis não são leis psicológicas; elas não regulam nosso pensamento, o nosso processo de pensar, como as leis da natureza regulam o mundo dos fenômenos. As leis da lógica regulam como representar em nosso pensar as relações entre os pensamentos. Em síntese, elas dizem respeito a como *devemos* pensar a fim de alcançarmos a distinção entre o verdadeiro e o falso (N. do T.).

13

MINHAS CONCEPÇÕES LÓGICAS FUNDAMENTAIS (c. 1915)

O que se segue talvez possa ser de alguma valia para a compreensão de meus resultados.

Se alguém reconhece algo como verdadeiro, então faz um juízo[1]. O pensamento é o que ele reconhece como verdadeiro. Não se pode reconhecer um pensamento como verdadeiro sem antes apreendê-lo. Um pensamento verdadeiro já era verdadeiro antes de ser apreendido por alguém[2]. Um pensamento não necessita de um ser humano como portador (*Träger*). O mesmo pensamento pode ser apreendido por diversos seres humanos[3]. O julgar não modifica o

O presente artigo foi postumamente publicado sob o título de 'Meine grundlegenden logischen Einsichten' em G. Frege, *Nachgelassene Schrift*, ed. H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach, Hamburg, F. Meiner Verlag, 1969, pp. 271-272. Ele deve ter sido redigido, segundo uma anotação de H. Scholz, em torno do ano de 1915. Antigos colaboradores, porém, são mais flexíveis e entendem que ele teria sido escrito 'durante os anos de guerra', isto é, entre 1914 e 1918.

1. A esse propósito escreve Frege em outro lugar: 'Um juízo (*Urteil*) para mim não é a mera apreensão (*Fassen*) de um pensamento, mas o reconhecimento (*Anerkennung*) de sua verdade'. Ver cap. 5, n. 50; cap. 7, n. 38. Cumpre assim não confundir pensamento (conteúdo asserível) com juízo (conteúdo asserido), uma vez que é possível apreender um pensamento sem com isto reconhecer seu valor de verdade (N. do T.).
2. Frege expõe aqui, uma vez mais, sua tríplice distinção envolvendo o pensamento (*Gedanke*): 'apreender' (*erfassen*), 'reconhecer' (*anerkennen*) e 'julgar' (*urteilen*). Cf. para detalhes, G. Frege, *Investigações Lógicas*, Porto Alegre, EDIPUCRS, 2002, p. 17ss (N. do T.).
3. Cumpre assim não confundir pensamento (conteúdo asserível) com juízo (conteúdo asserido), uma vez que é possível apreender um pensamento sem que isto signifique o reconhecimento de seu valor de verdade. Só quando reconheço que um pensamento é verdadeiro (ou falso) posso asseri-lo. Eis como Frege descreve o que vem a ser pensamento, em sua acepção: 'Entendo por pensamento não o

13

MINHAS CONCEPÇÕES LÓGICAS FUNDAMENTAIS (c. 1915)

O que se segue talvez possa ser de alguma valia para a compreensão de meus resultados.

Se alguém reconhece algo como verdadeiro, então faz um juízo[1]. O pensamento é o que ele reconhece como verdadeiro. Não se pode reconhecer um pensamento como verdadeiro sem antes apreendê-lo. Um pensamento verdadeiro já era verdadeiro antes de ser apreendido por alguém[2]. Um pensamento não necessita de um ser humano como portador (*Träger*). O mesmo pensamento pode ser apreendido por diversos seres humanos[3]. O julgar não modifica o

O presente artigo foi postumamente publicado sob o título de 'Meine grundlegenden logischen Einsichten' em G. Frege, *Nachgelassene Schrift*, ed. H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach, Hamburg, F. Meiner Verlag, 1969, pp. 271-272. Ele deve ter sido redigido, segundo uma anotação de H. Scholz, em torno do ano de 1915. Antigos colaboradores, porém, são mais flexíveis e entendem que ele teria sido escrito 'durante os anos de guerra', isto é, entre 1914 e 1918.

1. A esse propósito escreve Frege em outro lugar: 'Um juízo (*Urteil*) para mim não é a mera apreensão (*Fassen*) de um pensamento, mas o reconhecimento (*Anerkennung*) de sua verdade'. Ver cap. 5, n. 50; cap. 7, n. 38. Cumpre assim não confundir pensamento (conteúdo asserível) com juízo (conteúdo asserido), uma vez que é possível apreender um pensamento sem com isto reconhecer seu valor de verdade (N. do T.).
2. Frege expõe aqui, uma vez mais, sua tríplice distinção envolvendo o pensamento (*Gedanke*): 'apreender' (*erfassen*), 'reconhecer' (*anerkennen*) e 'julgar' (*urteilen*). Cf. para detalhes, G. Frege, *Investigações Lógicas*, Porto Alegre, EDIPUCRS, 2002, p. 17ss (N. do T.).
3. Cumpre assim não confundir pensamento (conteúdo asserível) com juízo (conteúdo asserido), uma vez que é possível apreender um pensamento sem que isto signifique o reconhecimento de seu valor de verdade. Só quando reconheço que um pensamento é verdadeiro (ou falso) posso asseri-lo. Eis como Frege descreve o que vem a ser pensamento, em sua acepção: 'Entendo por pensamento não o

pensamento reconhecido como verdadeiro. Quando se julga, pode-se sempre destacar o pensamento que foi reconhecido como verdadeiro; pois o ato de julgar não faz parte deste pensamento. A palavra "verdadeiro" não é um termo qualificativo (*Eigenschaftswort*) em sentido corrente.

Se às palavras "água do mar" agrego a palavra "salgada" como um predicado, formo uma sentença que expressa um pensamento. Para tornar mais claro que aqui só se quer expressar o pensamento, sem nada pretender asserir (*nichts behauptet werden solle*), reformulo a sentença sob a forma de uma subordinada "Que a água do mar é salgada". Em vez de assim fazer, poderia também levar um ator a recitá-la no palco ao desempenhar seu papel, pois sabidamente um ator ao representar um papel só em aparência fala com força assertiva (*behauptender Kraft*). O conhecimento do sentido das palavras "é salgada" é indispensável para a compreensão da sentença, já que elas contribuem de modo essencial para o pensamento – pois não temos nas palavras "água do mar", isoladamente, nem uma sentença e nem a expressão de um pensamento.

Com a palavra "verdadeiro" é totalmente distinto [em relação à 'salgado'][4]. Se agregar aquela palavra às palavras "Que a água do mar é salgada" como um predicado, formo igualmente uma sentença que expressa um pensamento. E, pela mesma razão anterior, reformulo também esta sentença sob a forma de uma subordinada "Que é verdadeiro que a água do mar é salgada". Mas o pensamento expresso por essas palavras coincide com o sentido da sentença "Que a água do mar é salgada". A palavra "verdadeiro" não dá por seu sentido nenhuma contribuição essencial ao pensamento. Se eu asserir "É verdadeiro que a água do mar é salgada", estou asserindo a mesma coisa do que se asserisse "A água do mar é salgada". Tal nos permite reconhecer que a asserção não se encontra na palavra "verdadeiro", mas na força assertiva com a qual a sentença é proferida. Com isso somos levados a pensar que a palavra "verdadeiro" não tem nenhum sentido; mas neste caso, tampouco teria qualquer sentido a sentença em que a palavra "verdadeiro" ocorresse como predicado. Tudo o que se pode dizer é: a palavra "verdadeiro" tem um sentido que em nada contribui para o sentido total da sentença em que figura como um predicado.

ato subjetivo de pensar, mas seu conteúdo objetivo, que pode ser propriedade comum de muitos'. Ver cap. 7, n. 31 (N. do T).

4. No que se segue, Frege procura mostrar que qualificar um pensamento de verdadeiro nada acrescenta a esse pensamento. Sobre a questão do conceito de verdadeiro, cf. G. Frege, 'Logik', em *Nachgelassene*, pp. 139-150; e ainda *Investigações Lógicas*, p. 11ss (N. do T).

Mas é exatamente por esse motivo que tal palavra parece adequada para indicar a essência da lógica. Qualquer outro qualificativo (*Eigenschaftswort*) seria menos adequado, por força de seu sentido específico, para esse propósito. A palavra "verdadeiro" parece assim fazer[5] o impossível possível, isto é, ela faz parecer como uma contribuição do pensamento o que corresponde à força assertiva. E ainda que isso malogre, ou melhor, pelo fato mesmo de malograr, ela aponta para o que é característico da lógica, e isso parece, do que acabamos de ver, essencialmente distinto do que é característico da estética e da ética. De fato, a palavra "belo" indica a essência da estética, assim como "bem" indica a essência da ética, enquanto que "verdadeiro" faz apenas uma tentativa malograda de indicar a [essência da] lógica, uma vez que aquilo que efetivamente concerne à lógica não está em absoluto na palavra "verdadeiro", mas na força assertiva com a qual uma sentença é proferida[6].

Muitas coisas que fazem parte do pensamento, tais como a negação e generalidade, parecem estar mais estreitamente associadas à força assertiva ou à verdade[7]. Mas basta perceber que elas também ocorrem, digamos, no antecedente de uma condicional ou na boca de um ator recitando seu papel para tal ilusão se desfazer.

E por que então a palavra "verdadeiro", que parece destituída de conteúdo, é contudo imprescindível? Em se tratando de fundar a lógica, não seria pelo menos aqui possível evitar totalmente essa palavra, já que ela só cria confusão? O fato disso não poder ser feito deve-se à imperfeição da linguagem. Tivéssemos uma linguagem logicamente perfeita e talvez não mais teríamos necessidade da lógica, ou então poderíamos depreendê-la (*ablesen*) da linguagem. Mas, ainda estamos muito longe disso. O trabalho lógico é, em grande parte, uma luta contra as deficiências lógicas da linguagem, que por certo é para nós um instrumento indispensável. Só após ter consumado nosso trabalho lógico possuiremos um instrumento mais perfeito.

O que mais claramente indica a essência da lógica é a força assertiva com a qual um pensamento é proferido. Mas a esta não corresponde nenhuma palavra, nenhuma parte de uma sentença; as mesmas palavras podem ser proferidas ora com força assertiva e ora sem ela. Em se tratando da linguagem, a força assertiva está vinculada ao predicado.

5. Em outra versão do manuscrito lemos em lugar de 'fazer' (*zu machen*) a expressão 'tentar fazer' (*machen zu wollen*). Ed. al.
6. Cf. G. Frege, *Investigações Lógicas*, p. 11 (N. do T.).
7. No manuscrito, essa sentença e a que se segue foram riscadas (Ed. al.).

14

AS FONTES DE CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA E EM CIÊNCIAS NATURAIS MATEMÁTICAS
(c. 1924)

Um conhecimento se dá quando um pensamento é reconhecido como verdadeiro. Desse modo, o pensamento deve antes de mais nada ser apreendido. Contudo, não considero a apreensão do pensamento como conhecimento, mas apenas o reconhecimento de sua verdade, o juízo propriamente dito[1]. Por fonte de conhecimento entendo o que justifica o reconhecimento da verdade, o juízo.

Distingo as seguintes fontes de conhecimento:

1. A percepção sensível.
2. A fonte lógica de conhecimento.
3. A fonte geométrica de conhecimento e a fonte temporal de conhecimento.

Cada uma dessas fontes de conhecimento está sujeita a suas próprias imperfeições, que lhes reduzem o valor.

Publicado postumamente sob o título de 'Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften' em G. Frege, *Nachgelassene Schrift*, ed. H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach, Hamburg, F. Meiner Verlag, 1969, pp. 286-294. Este artigo foi escrito, segundo os editores de seu *Nachlass*, entre 1924 e 1925, encontrando-se assim entre as últimas obras de Frege.

1. Também aqui, Frege reitera – ao tratar do pensamento – sua tríplice distinção 'apreender' (*erfassen*), 'reconhecer' (*anerkennen*) e 'julgar' (*urteilen*). Cf. para detalhes G. Frege, *Investigações Lógicas*, Porto Alegre, Edipucs, p. 17ss (N. do T.).

A. AS ILUSÕES DOS SENTIDOS

A impressão sensível ainda não é um juízo, mas se torna importante na medida em que ela nos leva a julgar. Aqui podem ocorrer enganos: as ilusões dos sentidos. Como a visão é o mais importante sentido para as ciências naturais matemáticas, ela deve ser examinada mais detalhadamente. Para nossa consciência, é reta a linha de visão que vai do olho ao objeto. E na maioria dos casos, o raio de luz, correspondente à linha de visão, que vai do objeto ao olho é também retilíneo, ou sofre desvios tão diminutos da linha reta que não merecem maiores cuidados. Se tivermos consciência do desvio, falamos de uma ilusão dos sentidos. Nos deparamos com tais casos na reflexão da luz na superfície de um espelho, ou na difração e refração da luz. Por causa dessas ilusões podemos de antemão encarar a percepção oriunda do sentido da visão como fonte de conhecimento pouco confiável e por isto de pequeno valor; e, no entanto, é exatamente a percepção sensível que muitos reputam como a fonte de conhecimento a mais confiável, ou mesmo a única confiável. Por certo, um espelho pendurado numa parede pode parecer uma abertura que permite olhar para o espaço vizinho; por certo, uma superfície de água tranqüila pode dar a ilusão de um sol que parece brilhar. Contudo, não mais nos deixamos enganar por tais fatos, porque existe a nosso dispor uma variedade de meios para corrigir o juízo oriundo de uma primeira impressão. Se não houvesse, evidentemente, nenhuma lei que governasse todos os acontecimentos, ou se as leis que regem os acontecimentos físicos fossem por nós desconhecidas, careceríamos de meios para reconhecer as ilusões dos sentidos enquanto tais, e com isto torná-las inofensivas. As leis da natureza que conhecemos já evitam de sermos enganados pelas ilusões dos sentidos. Assim, o conhecimento da refração da luz nos diz que muitas imagens que o microscópio nos propicia são totalmente inconfiáveis. Para conhecer as leis da natureza precisamos de percepções sensíveis isentas de ilusões. Isoladamente, as percepções sensíveis são de pouca utilidade para nós, pois, para alcançar o conhecimento das leis da natureza, necessitamos ainda das demais fontes de conhecimento: a lógica e a geométrica. Assim, só podemos avançar passo a passo: em que um progresso no conhecimento das leis da natureza nos protege das ilusões dos sentidos, e em que percepções mais purificadas nos auxiliam a melhor conhecer essas leis da natureza. Devemos ser pois cautelosos e não superestimar o valor da percepção sensível; pois sem as demais fontes de conhecimento, que nos protegem das ilusões, dificilmente poderíamos com ela fazer muita coisa. Necessitamos das percepções, mas para fazer uso das mesmas também neces-

sitamos de outras fontes de conhecimento. Somente todas tomadas em conjunto tornam possível penetrar sempre mais fundo na física matemática.

Para a matemática apenas, não necessitamos da percepção sensível como fonte de conhecimento; para ela, bastam as fontes lógicas e geométricas de conhecimento[2].

Por vezes, a percepção sensível foi um obstáculo para o progresso do conhecimento. Por muito tempo, a teoria da esfericidade da terra foi quase que universalmente tida como absurda, pois em tal caso a cabeça dos habitantes da parte inferior da terra penderia para baixo. A percepção sensível levava a considerar a direção para o alto a mesma em toda parte, e ainda hoje quanto a esse tema existem algumas dificuldades que as crianças julgam difícil de contornar. Muito tempo se passou para a teoria da esfericidade da terra ganhar suficiente embasamento para Colombo nela confiar e assim empreender sua famosa viagem. Seu sucesso e as subseqüentes circunavegações da terra constituem uma vitória da reflexão científica sobre velhas concepções sugeridas pela percepção sensível de modo quase irresistível, e fundadas aparentemente de maneira inabalável.

B. A FONTE LÓGICA DE CONHECIMENTO E A LINGUAGEM

Os sentidos nos trazem os dados externos e, por tal razão, se compreende como é mais fácil a possibilidade de enganos aqui do que na fonte lógica de conhecimento, interna a nós, e que parece mais segura contra contaminações. Mas as aparências enganam. Pois nosso pensamento está estreitamente vinculado à linguagem[3], e assim ao mundo exterior dos sentidos. Talvez o nosso pensar seja antes de mais nada um falar, que a seguir se torna uma representação do falar (*Vorstellen des Sprechens*). O pensar silencioso seria assim um falar silencioso que se desenvolve na representação. Naturalmente, podemos também pensar com sinais matemáticos; contudo, também aqui existe um vínculo entre o pensar e o dado sensível. Por certo distinguimos a sentença, enquanto expressão de um pensamento, do próprio pensamento. Sabemos que podemos expressar o mesmo pensamento de diversas maneiras. O vínculo entre um pensamento e uma determinada sentença não é em absoluto necessário; mas é necessário, para nós seres

2. Frege distingue, como se vê, três fontes possíveis de conhecimento: sensível, lógica (para a aritmética) e sintética (para a geometria). Só as duas últimas são relevantes para a matemática (N. do T.).
3. Frege alerta aqui para os perigos associados à imprecisão da linguagem corrente (N.do T.).

humanos, que um pensamento presente em nossas consciências esteja vinculado a uma certa sentença. Isto porém não decorre da natureza do pensamento, mas de nossa própria natureza. Não há nenhuma contradição em supor que existam seres capazes de apreender o mesmo pensamento que nós apreendemos sem ter que revesti-lo de uma forma sensível. Mas para nós seres humanos ainda se impõe esta necessidade. A linguagem é uma criação do homem; e o homem tinha, assim parece, a capacidade de plasmá-la segundo as aptidões lógicas (*logischen Anlage*) nele existentes. Por certo, também a aptidão lógica do homem foi atuante na formação da linguagem, conjuntamente com outras aptidões, tal como a aptidão poética. E, assim, a linguagem não é traçada de acordo com uma régua lógica (*logische Lineal*).

Uma propriedade da linguagem, nefasta para a credibilidade do pensamento, é sua tendência de criar nomes próprios aos quais nenhum objeto corresponde. Quando tal se dá no plano da ficção, e todos sabem que é ficção, isto não tem qualquer conseqüência nociva. É diferente, porém, quando ocorre num discurso com pretensão de rigor científico. Um exemplo particularmente notável temos na formação de um nome próprio segundo o modelo de "a extensão do conceito *a*", por exemplo "a extensão do conceito estrela fixa". Por força do artigo definido[4], esta expressão parece designar um objeto; mas não existe nenhum objeto que possa ser lingüisticamente assim designado. Disto, surgiram os paradoxos da teoria dos conjuntos[5], que destruíram essa mesma teoria. Eu mesmo, tentando encontrar um fundamento lógico para os números, fui vítima dessa ilusão, ao querer conceber os números como conjuntos[6]. É difícil evitar uma expressão de uso geral, antes de se aperceber os enganos que dela podem se originar. E mais difícil ainda, senão impossível, é verificar se toda expressão de uma linguagem é logicamente inofensiva. Assim, uma parte considerável do trabalho do filósofo consiste, ou deveria consistir, numa luta contra a linguagem. Mas só poucos talvez estejam conscientes dessa necessidade. A mesma expressão

4. Frege chama a atenção para o perigo associado à locução 'a extensão de ...', em que o artigo definido sugere a existência de um objeto onde na verdade nada existe (N. do T.).
5. O paradoxo advém da concepção ingênua de conjunto, admitida por Frege, segundo a qual para toda propriedade sempre existe um conjunto cujos elementos são todas as coisas, e só elas, às quais a propriedade se aplica. Tal concepção leva a um paradoxo quando a propriedade em questão vem a ser a seguinte: o conjunto que não é elemento de si mesmo. Este paradoxo recebeu o nome de 'paradoxo de Russell' pelo fato de ter sido Bertrand Russell o primeiro a dele ter conhecimento. Cf. *infra* p. 345 (N. do T.).
6. Frege acena para essa questão, de início, nos *Grundlagen der Arithmetik*, quando interpreta os números como extensões de conceitos. Mais tarde, em seu livro *Grundgesetze der Arithmetik*, ao fixar os axiomas para a extensão conceitual, os números são interpretados como conjuntos e assim chegando ao aludido paradoxo de Russell que decorre de seu quinto axioma (N. do T.).

"a extensão do conceito estrela fixa"

também serve para ilustrar, embora de outra maneira, a nefasta tendência da linguagem de formar nomes próprios aparentes. Um destes é

"o conceito estrela fixa".

O artigo definido[7] produz a impressão de que se está designando um objeto ou, o que vem a ser o mesmo, que "o conceito estrela fixa" é um nome próprio, enquanto que "conceito estrela fixa" é a designação de um conceito e, assim, em nítida oposição a todo nome próprio. As dificuldades que essa peculiaridade da linguagem acarreta são enormes[8].

Mas o pensar não é um falar?[9] Como é possível o pensar estar em conflito com o falar? Não seria este um conflito do pensamento consigo próprio? Isto não significa o término da possibilidade de pensar?

Com efeito, caso se leve em conta o surgimento do pensar no desenvolvimento do indivíduo, pode-se chamar o pensar de um falar interior silencioso; mas dessa maneira não se apreende a verdadeira natureza do pensar[10]. Não pode um matemático também pensar por fórmulas? A linguagem formular (*Formelsprache*) da matemática é uma criação tão humana quanto a linguagem falada (*Lautsprache*), mas radicalmente distinta desta. Nela, é dado evitar as peculiaridades da linguagem falada que levam, como vimos, a erros lógicos. Contudo, a influência da linguagem falada é tão grande que nem sempre isto pode ser evitado. Assim, se abstraímos como o pensamento se dá na consciência individual, e nos atemos à verdadeira natureza desta, vemos que não cabe igualá-la à linguagem. Nessas condições, não se deriva o pensar do falar;

7. Frege entende que o artigo definido singular é um critério seguro para originar ou reconhecer um nome próprio, isto é, uma expressão que designa um objeto (N. do T.).

8. Em diversos lugares Frege volta ao tema das descrições definidas, que ele denomina de 'nome próprio composto' (*i. e.*, expressões da forma 'o x tal que ...'), como meio de expressar conceitos e objetos. Contudo, o lugar em que esse tópico é visto da maneira mais detalhada é em seu artigo 'Sobre o Conceito e Objeto' (N. do T.).

9. Tal é o que nos diz também Platão na famosa passagem tantas vezes citada do *Teeteto*: 'o pensamento é o dialogo interior e silencioso da alma consigo mesma, 189E; *Sofista*, 263D (N. do T.).

10. Em muitos lugares de sua obra Frege contrapõe as expressões 'língua viva' (*Sprache des Lebens*), 'linguagem corrente' (*gewöhnlich Sprache*), 'linguagem por palavra' (*Wortsprache*), 'linguagem falada' (*Lautsprache*), 'linguagem do povo' (*Volksprache*) ou simplesmente 'linguagem' (*Sprache*), à 'conceitografia' (*Begriffsschrift*) ou 'linguagem formular' (*Formelsprache*). Ao que parece, ele nunca se utiliza de expressões como 'linguagem natural' e 'linguagem artificial', que se tornaram correntes na atualidade (N. do T.).

pelo contrário, o pensar surge prioritariamente (*als das Erste*) e não podemos responsabilizá-lo pelos defeitos lógicos observados na linguagem.

Na linguagem formular da matemática tem lugar uma importante distinção que se encontra oculta na linguagem corrente (*Wortsprache*). Naturalmente, os matemáticos estão ainda tão fortemente influenciados pela linguagem corrente que, mesmo em sua disciplina, nem sempre a distinção a que me refiro surge com a devida clareza. Os matemáticos são compelidos pela natureza mesma de sua disciplina a apreender um conceito que eles denominam de função. Já nas classes mais avançadas do ensino escolar, os alunos são introduzidos nas funções trigonométricas; e caso prossigam um pouco mais nos estudos matemáticos, ouvirão falar muito de funções, sem que se torne claro o que se quer dizer com essa palavra. Seus professores em vão se esforçam, e são exatamente os alunos mais dotados aqueles que menos entendem, já que percebem que as definições (*Erklärungen*) dadas não se harmonizam com as explicações do professor. Tem-se por certo o direito de esperar que uma definição, uma vez formulada, não seja relegada a um canto para cobrir-se de pó, mas que seja utilizada onde ocorrer a expressão que ela define. Mas, fica-se desapontado na medida em que a suposta definição [de função] não pode oferecer o que dela se espera. Nem tudo pode ser definido. Só o que foi decomposto em conceitos pode vir a ser reconstruído com as partes obtidas da decomposição. Mas o que é simples não pode ser decomposto e, portanto, não pode ser definido. Caso se tente defini-lo, o resultado é sem sentido. Todas as definições de função são desta espécie[11]. Como ensinar uma criança a entender os adultos? Não que ela disponha do conhecimento de algumas palavras e construções gramaticais, e assim tudo o que cumpre fazer seja apenas explicar o que ela não sabe por meio do conhecimento lingüístico que ela já possui. Na verdade, as crianças são apenas dotadas de potencialidade lingüística (*sprachliche Anlage*). Deve-se poder contar que elas venham ao encontro do entendimento, tal como se dá com os animais com os quais os seres humanos podem chegar a um entendimento recíproco. Sem este encontro de entendimento não é possível tornar compreensível as expressões que designam um conteúdo logicamente indecomponível. A palavra "função" é uma destas. A maneira pela qual são utilizadas as diversas designações de funções [particulares] pode nos ser aqui

11. Frege aqui expõe, uma vez mais, sua doutrina a respeito da função: sendo simples e inanalisável é, portanto, indefinível; e assim todas as tentativas de defini-la serão baldadas. Tudo o que pode ser feito para se entender o par função/argumento é observar como as expressões funcionais são utilizadas ou manipuladas. Cf. *supra* p. 26 (N. do T.).

de valia. O sinal "sen", que dizemos designar a função seno, sempre ocorre em matemática em estreita união com outros sinais – como "sen 10°", "sen 0°11'", "sen α" – e, assim, trata-se de um sinal que necessita de complementação[12] e nisto se distingue dos nomes próprios. Seu conteúdo, conseqüentemente, também necessita de complementação e nisto se distingue de qualquer objeto, e até mesmo, por exemplo, de qualquer número. Pois, em matemática, o número, que distingo do numeral[13], ocorre como objeto: digamos, *o* número 3.

Em matemática superior, é usual fazer o sinal "sen" ser seguido apenas por um numeral ou por uma letra que designa um sinal numérico. Assim, a grandeza de um ângulo A pode ser determinada simplesmente por um número em vez de ser expressa em graus, minutos e segundos, do seguinte modo[14]. Com efeito, seja C uma circunferência[15] no plano de A e cujo centro seja o vértice de A. Seja r o raio de C. Digamos que os lados de A interceptam um arco de C, cujo comprimento é b, digamos. Seja C_1 uma circunferência no plano de A, cujo centro é o vértice de A. Seja r_1 o raio de C_1, e que os lados de A interceptem um arco de C_1 cujo comprimento é b_1. Então, temos a proporção $b : r = b_1 : r_1$. Assim, b/r é o mesmo número que b_1/r_1, e esse número depende da grandeza do ângulo A e também determina esta grandeza. Se em lugar do ângulo A tomarmos o ângulo A', então b'/r ocupa o lugar de b/r, e b'_1/r_1 ocupa o lugar de b_1/r_1, e de fato, se A' for maior que A, então b' será maior que b. E assim também no caso $b'/r > b/r$. Assim, a grandeza do ângulo A é determinada pelo número b/r, que coincide com o número b_1/r_1; e, de fato, a ângulos maiores correspondem números maiores. Desse modo, b/r é maior, menor ou igual que b'/r, segundo A seja maior, menor ou igual que A'. Disso podemos ver como o número b/r (que coincide com o número b_1/r_1) determina o ângulo A. Se $b/r = 1$, então $b = r$. O número 1 determina pois um ângulo pelo qual o comprimento b é igual a r, vale dizer, pelo qual o comprimento do arco de C interceptado por seus lados é igual ao raio de C. Do mesmo modo, também o número 2 determina um ângulo para o qual o comprimento do arco de C interceptado

12. Cumpre observar, tal é o que Frege se esforça em fazer, que a função seno (como qualquer outra função trigonométrica) tanto pode ser complementada por um ângulo (*v. g.*, sen 10°26'') como por um número real (*v. g.*, sen 10). N. do T.
13. Frege distingue, com máxima nitidez, *Zahl*, 'número', de *Zahlzeichen*, 'sinal numérico' ou 'numeral'(N. do T.).
14. O objetivo da demonstração que se segue é estabelecer que a todo ângulo corresponde um número real independentemente do raio da circunferência na qual ele está inserido. Observe-se que a recíproca não é verdadeira, pois a cada real corresponde uma infinidade de ângulos (N. do T.).
15. [Tomo a palavra] "círculo" (*Kreis*) no sentido de "linha circular" (*Kreislinie*). Aqui, suponho que o ângulo seja menor que 360°.

por seus lados tem o dobro do comprimento do raio de *C* etc. Podemos também dizer: o número que determina, dessa maneira, a grandeza de um ângulo é o número que resulta da medida do arco de C interceptado pelos lados [do referido ângulo] com o auxílio de seu raio. Desse modo, é fixado, para cada caso, o número que resulta se o sinal "sen" for complementado com um sinal de número real. Portanto, a única coisa pressuposta é que se saiba a relação que existe entre um ângulo e seu seno.

Do mesmo modo, o sinal "cos" (coseno) também precisa ser complementado, e ele deve ser complementado com numerais, e cos 1, cos 2 e cos 3 são números. Mas "cos" não é um nome próprio e nem designa um objeto, mas não se pode negar ao sinal "cos" um conteúdo. Se, contudo, alguém quisesse dizer, usando o artigo definido, '*o* conteúdo do sinal "cos"', teria expressado a idéia errônea de que o conteúdo do sinal "cos" seria um objeto. Disto se pode compreender como é difícil não ser levado ao engano pela linguagem. E exatamente por ser tão difícil, não se pode esperar que um autor[16] de parcos recursos se desse ao trabalho de evitar esse engano; e os usos lingüísticos, por certo, sempre serão como são.

Além disso, ainda existe o seguinte. Os matemáticos empregam letras para expressar a generalidade, como na sentença:

$$\text{“}(a + b) + c = (a + c) + b\text{”}.$$

Essas letras aqui representam numerais, e pela substituição dessas letras por numerais se chega a expressão de um pensamento determinado contido em um pensamento geral. Caso se admitam funções, tem-se também a necessidade de expressar a generalidade inerente às funções. E assim como se usam letras em lugar de numerais para expressar um pensamento geral a respeito de números, também podemos utilizar letras com o objetivo de expressar um pensamento geral a respeito de funções. Costuma-se para esse propósito utilizar as letras f, F, g, G e também N e M, que podemos chamar de letras funcionais (*Funktionsbuchstaben*)[17]. Mas a necessidade de complementar a função tam-

16. Frege aqui se refere, assim supomos, ao filósofo e lógico Benno B. Kerry (1858-1889) que numa série de artigos – em que resenha alguns tópicos dos *Fundamentos da Aritmética* – critica não só a teoria fregeana do conceito (isto é, de que nada pode ser simultaneamente conceito e objeto, o que Kerry abertamente contesta), como também sua utilização das descrições definidas para expressar conceitos e objetos. Cf. *supra* 'Sobre o Conceito e o Objeto' (N. do T.).
17. Na terminologia corrente, diz-se 'variáveis funcionais' (N. do T.).

bém deve, de algum modo, encontrar aqui uma expressão. E se assim é o caso, após as letras funcionais cumpre introduzir parênteses que em conjunto com as letras funcionais devem ser considerados como um único sinal. O espaço interno entre os parênteses é o lugar que ocupará o sinal que complementa a letra funcional. Substituindo em $f(1)$ a letra funcional pelo sinal "sen", sinal de uma certa função, obtém-se "sen 1", tal como de "a^2" se obtém "3^2" ao substituir a letra "a" por "3". Em ambos os casos se passa, ao assim fazer, de um sinal que indica indefinidamente – isto é, de uma letra – para um sinal que designa definidamente. Se numa sentença isto vem a ocorrer, tal fato corresponde à passagem de um pensamento geral para um pensamento particular nele contido. Um exemplo disto temos na passagem de "$(a - 1) \cdot (a + 1) = a \cdot a -1$" para "$(3 - 1) \cdot (3 + 1) = 3 \cdot 3 - 1$". Por outro lado, não nos é possível dar aqui um exemplo similar para o caso em que um sinal funcional (*Funktionszeichen*) que designa definidamente seja substituído por uma letra que indica indefinidamente, já que para tanto teríamos que pressupor elementos da Análise superior. Mesmo assim, fica suficientemente claro o que quero dizer, e podemos ter ao menos uma idéia da relevância da introdução de funções na pesquisa matemática, conjuntamente com a introdução de sinais funcionais e letras funcionais na linguagem por sinais[18] da matemática. A tendência da linguagem de caracterizar como objeto, pela utilização do artigo definido, aquilo que é função, e portanto um não-objeto, vem a ser uma fonte de expressões errôneas e inadequadas, e assim também de equívocos de pensamento. É provável que também aqui se origine a grande maioria das impurezas que contaminam a fonte lógica de conhecimento.

C. A FONTE GEOMÉTRICA DE CONHECIMENTO

Da fonte geométrica de conhecimento emanam os axiomas da geometria. É a menos exposta à contaminação. Contudo, cumpre entender a palavra "axioma" em seu exato sentido euclidiano. Pois também aqui se introduziu, em trabalhos recentes[19] sobre os axiomas, uma contaminação, distorcendo,

18. A palavra *Zeichensprache*, 'linguagem por sinais', acima utilizada, pode também significar "notação" (N. do T.).
19. Frege aqui se refere à concepção de Hilbert a respeito da natureza dos axiomas, exposta em seus célebres *Fundamentos de Geometria* (1899). Cf. para detalhes 'Über Euklidische Geometrie', G. Frege, *Nachgelassene*, pp. 182-184 (N. do T.).

tão sutilmente à primeira vista, o clássico sentido euclidiano, e a seguir imprimindo um outro sentido às sentenças em que os axiomas são veiculados. Não posso enfatizar suficientemente que, aqui, me refiro aos axiomas apenas em seu sentido clássico euclidiano, quando neles reconheço uma fonte geométrica de conhecimento[20]. Se tivermos isto bem presente, não cabe temer pela contaminação dessa fonte de conhecimento.

Da fonte geométrica de conhecimento emana o infinito no mais exato e genuíno sentido do termo. Aqui, não nos diz respeito a prática lingüística cotidiana segundo a qual "infinitamente grande" e "infinitamente diferente" nada mais dizem que "muito grande" e "muito diferente". Em cada segmento de reta, em cada circunferência, temos uma infinidade de pontos diferentes; e em cada ponto passam infinitas retas diferentes. Que nós não possamos representar tudo isto individualmente não tem importância. Um homem pode imaginar mais e outro pode imaginar menos. Pois aqui não nos encontramos no domínio da psicologia, da representação, do que é subjetivo, mas no âmbito do objetivo e do verdadeiro. Aqui, a geometria e a filosofia se aproximam ao máximo. Com efeito, elas seguem juntas. Um filósofo que não tenha nenhuma familiaridade com a geometria é apenas um meio filósofo; e um matemático que não tenha nenhuma veia filosófica é apenas um meio matemático. Essas disciplinas se afastaram uma da outra em detrimento de ambas. Assim, houve um tempo em que estava em voga a aritmética formal[21], a concepção segundo a qual os números seriam numerais. Talvez ela ainda até esteja vigente. Mas como se chega a isto? Se alguém se ocupa da ciência dos números, há de se sentir obrigado a dizer o que entende por número. Reconhecendo sua incapacidade de levar a termo essa tarefa conceitual, sem qualquer hesitação, lança a identificação dos números com os numerais. De fato, estes são coisas que vemos com nossos olhos, tal como vemos pedras, plantas e estrelas. Não há dúvida que pedras existem. E tampouco pode haver dúvida de que os números existem. Basta apenas banir da mente o pensamento de que estes números significam algo ou tenham um conteúdo. Pois, do contrário, teria que mostrar esse conteúdo, o que o levaria a incríveis dificuldades. A vantagem da aritmética formal é esta, a de evitar tais dificuldades. Daí nunca ser suficientemente enfatizado que os números não são o conteúdo ou o sentido de certos sinais:

20. Segundo Frege, importa que se diga, os axiomas são sentenças que além de serem aceitas sem provas, são também verdadeiras e evidentes. Com isto, ele é levado a rejeitar a geometria não-euclidiana (N. do T.).

21. Frege se refere especificamente ao formalismo, vale dizer, à teoria desenvolvida por E. Heine, J. Thomae e outros. Cf. Introdução, n. 34 (N. do T.).

esses numerais são eles mesmos os números e não têm nenhum conteúdo ou sentido. Mas só pode falar dessa maneira quem não tem nenhum vislumbre de inteligência filosófica. Se assim fosse, um enunciado numérico (*Zahlangabe*) nada diria, e os números seriam totalmente inúteis e sem valor.

É evidente que a percepção sensível não pode levar a nada de infinito. Por mais que listemos as estrelas, elas nunca serão multiplamente infinitas, e o mesmo se dá com os grãos de areia das margens dos mares. E assim, onde quer que reconheçamos o infinito em sentido próprio, não o obtivemos da percepção sensível. Para tanto, necessitamos de uma fonte de conhecimento especial, e tal fonte é a geométrica.

Além do aspecto espacial, também há que se reconhecer o aspecto temporal. A este também corresponde uma fonte de conhecimento e dela também derivamos o infinito. O tempo, infinito em ambas as direções, é semelhante a uma reta, infinita em ambas as direções.

CORPUS FREGEANUM

1873

1. *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene.* Jena, A. Neuenhann, 1873, 75 p. Cf. [50].

1874

2. *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen.* Jena, F. Fromann, 1874, 26 p. Cf.[50].
3. Resenha de H. Seeger, *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet. Zwei Anhänge:* 1. *Historische Notizen.* 2. *Deutsch-französisches Vocabularium.* Schwerin i. M., A. Hildebrand, 1874, IV, 148, 47 p., publicado em *Jenaer Literaturzeitung,* 1 (1874) p. 722. Cf. [50].

1877

4. Resenha de A. v. Gall & E. Winter, *Die analytische Geometrie des Punktes und der Geraden und ihre Anwendung auf Aufgaben.* Darmstadt, Ph. J. Diehl, 1876, VIII, 116 p., publicado em *Jenaer Literaturzeitung,* 4 (1877) p. 133-134. Cf. [50].
5. Resenha de J. Thomae, *Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.* Halle

a. S., L. Nebert, 1876, VI, 37 p., publicado em *Jenaer Literaturzeitung*, 4 (1877) p. 472. Cf. [50].

1878

6. 'Über eine Weise, die Gestalt eines Dreiecks als komplexe Grösse aufzufassen'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 12 (1878) Supplement, p. XVIII. Cf. [50].

1879

7. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S., L. Nebert, 1879, X, 88 p. Cf.[48].
8. 'Anwendungen der Begriffsschrift'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 13 (1879) Supplement II, pp. 29-33. Cf. [48].

1880

9. Resenha de R. Hoppe, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*. I. Teil. Leipzig, Koch, 1880, XV, 89 p. publicado em *Deutsche Literaturzeitung*, 1 (1880) pp. 210-211. Cf. [50].

1882

10. 'Über den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 15 (1882) Supplement, pp. 29-32. Cf. [48].
11. 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift'. *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 81 (1882) pp. 48-56. Cf. [48].

1883

12. 'Über den Zweck der Begriffsschrift'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 16 (1883) Supplement, pp. 1-10. Cf. [48].

1884

13. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, W. Koebner, 1884, XI, 199 p.

14. 'Geometrie der Punktpaare in der Ebene'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 17 (1884) Supplement, pp. 98-102. Cf. [50].

1885

15. Resenha de H. Cohen, *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*. Berlin, Dümmler, 1883, 162 p., publicado em *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 87 (1885) pp. 324-329. Cf. [50].
16. 'Erwiderung' [auf Cantors Rezension der G*rundlagen der Arithmetik*]. *Deutsche Literaturzeitung*, 6 (1885) p. 1030. Cf.[50].

1886

17. 'Über formale Theorien der Arithmetik'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 19 (1886) Supplement, pp. 94-104. Cf. [50].

1891

18. *Funktion und Begriff.* Jena, H. Pohle, 1891, II, 31 p. Cf. [47], [50].
19. 'Über das Trägheitsgesetz'. *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 98 (1891) pp. 145-161. Cf. [50].

1892

20. 'Über Sinn und Bedeutung'. *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 100 (1892) pp. 25-50. Cf. [47], [50].
21. 'Über Begriff und Gegenstand'. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16 (1892) pp. 192-205. Cf.[47], [50].
22. Resenha de G. Cantor, 'Zur Lehre vom Transfiniten'. *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 100 (1892) pp. 269-272. Cf. [50].

1893

23. *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet.* I. Band. Jena, H. Pohle, 1893, XXXII, 253 p.

1894

24. Resenha de E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchung.* Erster Band, Leipzig, 1891, publicado em

Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik, 103 (1894) pp. 313-332. Cf. [50].

1895

25. 'Le nombre entier'. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 3 (1895) pp. 73-78. Cf. [50].
26. 'Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik', *Archiv für Systematische Philosophie*, 1 (1895) pp. 433-456. Cf. [49], [50].

1896

27. 'Lettera del sig. G. Frege all'Editore'. *Rivista di Matematica*, 6 (1896-1899) pp. 53-59. Cf. [50].

1897

28. 'Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene', *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, 48 (1897) pp. 361-378. Cf. [47].

1899

29. *Über die Zahlen des Herrn H. Schubert.* Jena, H. Pohle, 1899, VI, 32 p. Cf. [49], [50].

1902

30. 'A Letter to Bertrand Russell on Russell's Paradox', datada de 22 de junho de 1902, publicada postumamente em J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic: 1879-1931.* Cambridge (Mass.), Harvard U.P., 1967, pp. 126-128.

1903

31. *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* II. Band. Jena, H. Pohle, 1903, XV, 265 p.

32. 'Über die Grundlagen der Geometrie'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12 (1903) pp. 319-324. Cf. [50]
33. 'Über die Grundlagen der Geometrie. II', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12 (1903) pp. 368-375. Cf. [50].

1904

34. 'Was ist eine Funktion?'. *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904*, Leipzig, J. A. Bart, 1904, pp. 656-666. Cf. [47], [50].

1906

35. 'Über die Grundlagen der Geometrie. I'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15 (1906) pp. 293-309. Cf. [50].
36. 'Über die Grundlagen der Geometrie. (Fortsetzung) II'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15 (1906) pp. 377-403. Cf. [50].
37. 'Über die Grundlagen der Geometrie. (Schluβ) III'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15 (1906) pp. 423-430. Cf. [50].
38. 'Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15 (1906) pp. 586-590. Cf. [50].

1908

39. 'Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 17 (1908) pp. 52-55. Cf. [50].
40. 'Schluβbemerkung'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 17 (1908) p. 56. Cf. [50].

1912

41. Notas a P. E. B. Jourdain, 'The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics: Gottlob Frege'. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 43 (1912) pp. 237-269. Cf. [50].

1918

42. 'Der Gedanke. Eine logische Untersuchung'. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1 (1918) pp. 58-77. Cf. [49], [50].
43. 'Die Verneinung. Eine logische Untersuchung'. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1 (1918) pp. 143-157. Cf. [49], [50].

1923

44. 'Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge'. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 3 (1923) pp. 36-51. Cf. [49], [50].

1940

45. 'Ein unbekannter Brief von Gottlob Frege über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie'. [Aus dem Nachlaβ von H. Liebmann herausgegeben von M. Steck], *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse,* Jahrgang 1940, Heidelberg, 1940, 8 p. Cf. [50].

1941

46. 'Unbekannte Briefe Frege's über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilbert's an Frege'. [Aus dem Nachlaβ von H. Liebmann herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von M. Steck], *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, Jahrgang 1941, Heidelberg, 1941, 31 p. Cf. [50].

1962

[47.] G. Patzig (ed.), G. Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien.* Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1962, 101 p.

1964

[48.] I. Angelelli (ed.), G. Frege. *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, 2. Auflage, mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen, Hildesheim G. Olms, , 1964, XVI, 124 p.

1966

[49.] G. Patzig (ed.), G. Frege. *Logische Untersuchungen.* Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1966, 142 p.

1967

[50.] I. Angelelli (ed.), G. Frege, *Kleine Schriften*, Hildesheim, G. Olms, 1967, 434 p.

1969

[51.] H. Hermes; F. Kambartel & F. Kaulbach (ed.), G. Frege. *Nachgelassene Schriften.* Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1969, XLI, 322 p.

1971

[52.] G. Gabriel; H. Hermes; F. Kambartel; C. Thiel & A. Veraart (ed.), G. Frege. *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1976, XXVI, 310 p.

ÍNDICE REMISSIVO

CLÁSSICOS

1. *Os Fundamentos Racionais e Sociológicos da Música*
   Max Weber

2. *Literatura Européia e Idade Média Latina*
   Ernest Curtius

3. *A Arte Moderna nos Séculos XIX e XX*
   Meyer Schapiro

4. *A Economia das Trocas Lingüísticas*
   Pierre Bourdieu

5. *Construção Nacional e Cidadania*
   Reinhard Bendix

6. *Sistemas Políticos da Alta Birmânia*
   E. R. Leach

7. *Coerção, Capital e Estados Europeus*
   Charles Tilly

8. *A Eloqüência dos Símbolos*
   Edgar Wind

9. *Poliarquia*
   Robert A. Dahl

10. *A Cultura do Barroco*
José Antonio Maravall

11. *Nós, os Tikopias*
Raymond Firth

12. *Renascimento do Profissionalismo*
Eliot Freidson

13. *A Forma e o Inteligível*
Robert Klein

14. *Cursos de Estética I*
G. W. F. Hegel

15. *Uma Teoria Econômica da Democracia*
Anthony Downs

16. *A Lógica da Ação Coletiva*
Mancur Olson

17. *Espelhos e Máscaras*
Anselm L. Strauss

18. *Cursos de Estética II*
G. W. F. Hegel

19. *O Declínio dos Mandarins Alemães*
Fritz K. Ringer

20. *Como Pensam os Nativos*
Marshall Sahlins

21. *Sublime Poussin*
Louis Marin

22. *O Estado-Nação e a Violência*
Anthony Giddens

23. *Filosofia da Arte*
F. W. J. Schelling

24. *Cursos de Estética III*
G. W. F. Hegel

25. *Linguagens do Ideário Político*
J. G. A. Pocock

26. *Cursos de Estética IV*
G. W. Hegel

27. *Ouro Vermelho*
John Hemming

28. *Naven*
Gregory Bateson

29. *A Fronteira Amazônica*
John Hemming

30. *A Europa e os Povos sem História*
Eric Wolf

31. *Lógica e Filosofia da Linguagem*
Gottlob Frege

Título	*Lógica e Filosofia da Linguagem*
Autor	Gottlob Frege
Tradução	Paulo Alcoforado
Produção	Silvana Biral
Projeto Gráfico do Miolo	Marina Watanabe
Projeto Gráfico da Capa	Marcos Keith Takahashi
Diagramação da Capa	Monique Sena
Foto da Capa	Rômulo Fialdini
Editoração Eletrônica	Ponto & Linha
Editoração de Texto	Alice Kyoko Miyashiro
Revisão de Texto	Jonathan Busato
Revisão de Provas	Thaisa Burani
	Jenifer Ianof
	Alice Kyoko Miyashiro
	Leonardo Ortiz Matos
Divulgação	Regina Brandão
	Cinzia de Araujo
	Fernando Ogushi
Secretaria Editorial	Eliane dos Santos
Formato	18 x 25,5 cm
Tipologia	Times 10/14
Papel	Cartão Supremo 250g/m^2 (capa)
	Chamois Fine Dunas 80 g/m^2 (miolo)
Número de Páginas	248
Tiragem	1500
CTP, Impressão e Acabamento	Rettec Artes Gráficas

Título	*Lógica e Filosofia da Linguagem*
Autor	Gottlob Frege
Tradução	Paulo Alcoforado
Produção	Silvana Biral
Projeto Gráfico do Miolo	Marina Watanabe
Projeto Gráfico da Capa	Marcos Keith Takahashi
Diagramação da Capa	Monique Sena
Foto da Capa	Rômulo Fialdini
Editoração Eletrônica	Ponto & Linha
Editoração de Texto	Alice Kyoko Miyashiro
Revisão de Texto	Jonathan Busato
Revisão de Provas	Thaisa Burani
	Jenifer Ianof
	Alice Kyoko Miyashiro
	Leonardo Ortiz Matos
Divulgação	Regina Brandão
	Cinzia de Araujo
	Fernando Ogushi
Secretaria Editorial	Eliane dos Santos
Formato	18 x 25,5 cm
Tipologia	Times 10/14
Papel	Cartão Supremo 250g/m^2 (capa)
	Chamois Fine Dunas 80 g/m^2 (miolo)
Número de Páginas	248
Tiragem	1500
CTP, Impressão e Acabamento	Rettec Artes Gráficas

Ao longo de uma retraída e obscura existência de professor de Universidade de Jena, Gottlob Frege realizou uma obra das mais significativas no campo da lógica matemática e da filosofia da linguagem, obra que, conhecida e estimada a princípio por uns poucos especialistas, como Russell, Husserl e Peano, iria mais tarde influenciar de maneira decisiva as formulações do pensamento contemporâneo. O leitor de língua portuguesa tem agora a oportunidade de acesso direto aos textos fundamentais de Frege, graças a esta coletânea organizada por Paulo Alcoforado, professor aposentado da UFRJ. Além de ter preparado especialmente para a presente edição um estudo acerca da vida, da obra e do pensamento de Frege, o professor Alcoforado selecionou e traduziu os textos aqui reunidos, tornando *Lógica e Filosofia da Linguagem* um empreendimento de expressivo interesse cultural.

ISBN 978-85-314-1180-9
9 788531 411809